Lycée Louise Michel
1G 2019/2020

http ://mathGM.free.fr

MATHEMATIQUES
Interrogation (corrigé)

Nom : **Prénom :** **Classe :**

Exercice 1

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, respectivement par :

$$u_n = 1 - 5n \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 4v_n + 3 \end{cases}$$

1. Calculer u_{10} et v_2.

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

1. $u_{10} = 1 - 5 \times 10 = -49$.
$v_1 = 4 \times v_0 + 3 = 4 \times 3 + 3 = 15$ et $v_2 = 4 \times v_1 + 3 = 4 \times 15 + 3 = 63$.

2. $u_{n+1} = 1 - 5(n+1) = \underbrace{1 - 5n}_{u_n} - 5 = u_n - 5$.

Exercice 2

Afin de conserver au fil des années un parc en bon état, un loueur de vélos se sépare chaque fin d'année année de 20 % de son stock et achète ensuite 35 nouveaux vélos.

En début d'année 2018, le loueur possède 150 vélos.

1. Déterminer le nombre de vélos dans le stock du loueur en 2019.

2. A l'aide d'une suite, modéliser cette situation pour estimer le nombre de vélos dans le stock de ce loueur les années suivantes.
Vous noterez (u_n) cette suite et vous préciserez ce que désignent u_n et n.

3. En utilisant la calculatrice, estimer le nombre de vélos dans le stock en 2030.

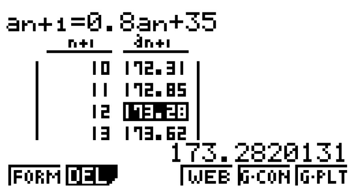
1. 20 % de $150 = 0,2 \times 150 = 30$. Fin 2018, il se sépare de 30 vélos fin 2018 et achète ensuite 35 vélos.

$150 - 30 + 35 = 155$. Il en a donc 155 en 2019.

2. On note u_n le nombre de vélos en début d'année $2018 + n$.
n est le nombre d'années après 2018.
Enlever 20 % d'une quantité revient à la multiplier par 0,8.

On a ainsi : $u_0 = 150$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,8 \times u_n + 35$.

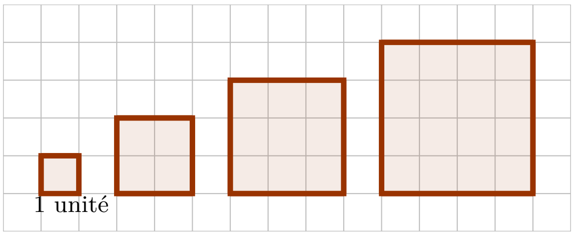
3. A l'aide de la calculatrice, on obtient :



En 2030 $(2018 + 12)$ il y aura 163 vélos.

Exercice 3

On construit une suite de carrés comme ci-dessous. Le n-ième carré a pour côté n unités.



Pour tout entier naturel n non nul, on note a_n l'aire du n ième carré et p_n le périmètre du n ième carré.

1. Donner a_1, a_2, p_1 et p_2.
$a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $p_1 = 4$ et $p_2 = 8$.

2. Déterminer les expressions de a_n et p_n en fonction de n.
$a_n = n^2$ et $p_n = 4n$.

3. Donner l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n.
$p_{n+1} = 4(n+1) = \underbrace{4n}_{p_n} + 4 = p_n + 4$.

4. Donner l'expression de a_n en fonction de p_n.
Comme $p_n = 4n$, on a $n = \dfrac{p_n}{4}$. Ainsi, $a_n = n^2 = \left(\dfrac{p_n}{4}\right) = \dfrac{p_n^2}{16}$

Exercice 4

On considère les trois fonctions informatiques suivantes programmées en langage Python.

```
def terme_u(n):
    u=3
    for k in range(n):
        u=2*u+4
    return(u)
```

```
def terme_v(n):
    return 4*n-10/n
```

```
def terme_w(n):
    w=0
    for k in range(1,n+1):
        w=w+1/k
    return(w)
```

1. Qu'obtient-on lorsqu'on appelle `terme_u(2)` , `terme_v(5)` et `terme_w(3)` dans la console ?

Voici les différents résultats obtenus :

```
>>> terme_u(2)
24
```

```
>>> terme_v(5)
18.0
```

```
>>> terme_w(3)
1.8333333333333333
```

2. Décrire les suites associées à ces trois fonctions. On les notera u, v et w.

La suite u est définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n + 4 \end{cases}$.

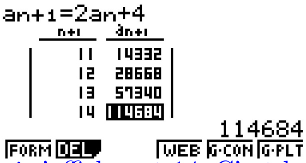
La suite v est définie pour tout entier naturel n par $v_n = 4n - \dfrac{10}{n}$.

La suite w est définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{n+1} = w_n + \dfrac{1}{n+1} \end{cases}$.

3. On lance le programme suivant :

```
n=0
while terme_u(n)<100000:
    n=n+1
print(n)
```

En utilisant la calculatrice, donner le résultat qui s'affiche quand on exécute ce programme.

On obtient : 

.

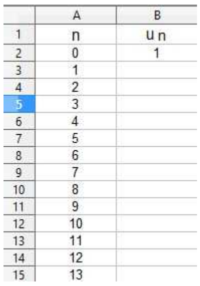
Le résultat qui s'affiche est 14. C'est le plus petit entier à partir duquel $u_n \geqslant 100000$.

Exercice 5

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 \end{cases}$.

1. Calculer u_1 en écrivant le détail du calcul.

2. Avec un tableur on obtient :



	A	B
1	n	un
2	0	1
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	
10	8	
11	9	
12	10	
13	11	
14	12	
15	13	

On veut compléter la colonne B par recopie vers le bas. Quelle formule doit être saisie dans la cellule $B3$?

1. $u_1 = 3u_0 - 2 \times 0 + 3 = 3 \times 1 - 0 + 3 = 6$.

2. En $B3$, on écrit : $\boxed{= 3 * B2 - 2 * A2 + 3}$.

Exercice 6

x est un nombre de l'intervalle $I = \left[\frac{\pi}{2} \; ; \; \pi\right]$ tel que $\sin x = \frac{1}{3}$. Le but de cet exercice est de trouver la valeur exacte de $\cos x$.

1. Démontrer que $(\cos x)^2 = \frac{8}{9}$.

2. **a.** Sur quel arc du cercle trigonométrique sont situés les points M associés aux nombres de l'intervalle I ? Colorier cet arc.

b. Quel est le signe de $\cos x$?

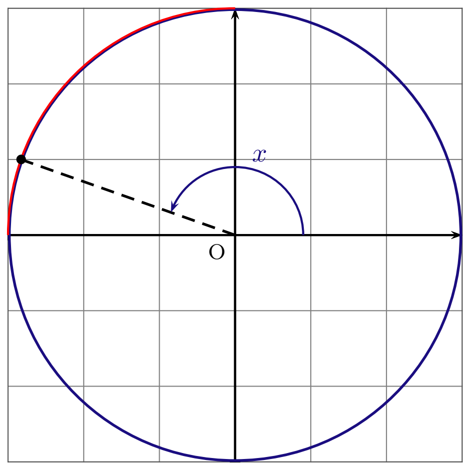
c. En déduire la valeur exacte de $\cos x$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

$$\begin{aligned} \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) &\iff \cos^2(x) = 1 - \frac{1}{9} \\ &\iff \cos^2(x) = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

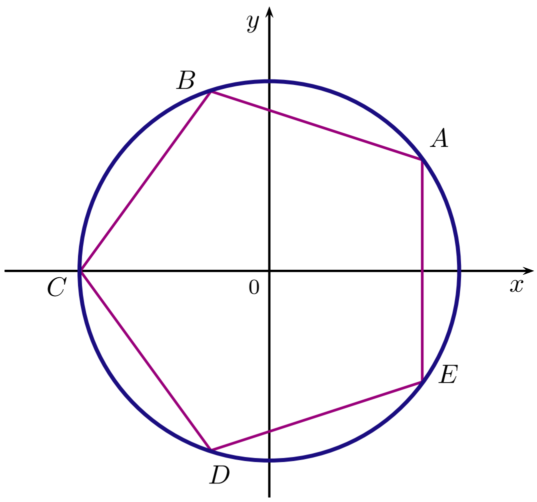
Donc $\cos(x) = \sqrt{\frac{8}{9}}$ ou $\cos(x) = -\sqrt{\frac{8}{9}}$.

D'où $\cos(x) = -\sqrt{\frac{8}{9}}$ car pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{2} \; ; \; \pi\right]$, $\cos(x) \leqslant 0$.



Exercice 7

Le pentagone régulier $ABCDE$ est inscrit dans le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.



Par enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique, à quels réels de l'intervalle $]-\pi;\pi]$ sont associés les sommets de ce pentagone ? Expliquer la démarche.

Par enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique, le point C est l'image de π.

Le pentagone régulier $ABCDE$ est inscrit dans le cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1.
La longueur d'un arc de cercle entre deux sommets consécutifs du pentagone $ABCDE$ est égale à : $\dfrac{2\pi}{5}$.

On en déduit que :

- le point B est l'image du réel $\pi - \dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{3\pi}{5}$.
- le point A est l'image du réel $\pi - 2 \times \dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\pi}{5}$.
- le point E est l'image du réel $\pi - 3 \times \dfrac{2\pi}{5} = -\dfrac{\pi}{5}$.
- le point D est l'image du réel $\pi - 4 \times \dfrac{2\pi}{5} = -\dfrac{3\pi}{5}$.

Polygone régulier

Les angles au centre d'un polygone régulier à n côtés ont tous pour mesure $\dfrac{2\pi}{n}$.

A voir

Bien entendu, on commence par le point C qui a une position bien connu sur le cercle trigonométrique. Ensuite on en déduit les autres réels en retranchant des $\dfrac{2\pi}{5}$ et pas ajoutant des $\dfrac{2\pi}{5}$ car sinon on ne serait dans l'intervalle demandé : $]-\pi\ ;\ \pi]$. Donc attention.