MATHEMATIQUES
Fonction exponentielle : QCM (corrigé)

Cours

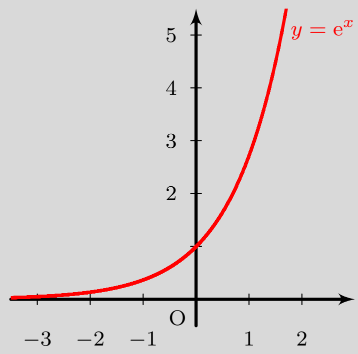
Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$.

1. Cette équation n'a pas de solution.

Réponse : d.

Courbe

Pour répondre à ces questions rien de mieux que d'avoir la courbe en tête !



2. Soit f la fonction exponentielle. Soit $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

- $f'(x) = \mathrm{e}^x > 0$, donc $\mathscr{C}$ n'a pas de tangente horizontale.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$. Donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}$.
- La droite d'équation $y = x$ n'est pas tangente à $\mathscr{C}$.
- $\mathscr{C}$ n'a pas de tangente verticale.

Réponse : b.

3. $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
f est de la forme e^u avec $u(x) = -x$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \underbrace{-1}_{u'(x)} \times \underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{\mathrm{e}^{u(x)}} = -\mathrm{e}^{-x} = -\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.

Réponse : a. et d.

4. On transforme l'écriture de $f(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1 - \frac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{\mathrm{e}^{-x} + 1} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-x} + 1}{\mathrm{e}^{-x} + 1} - \frac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{\mathrm{e}^{-x} + 1} && \text{Mise au même dénominateur.} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-x} + 1 - (\mathrm{e}^{-x} - 1)}{\mathrm{e}^{-x} + 1} \\
&= \frac{\cancel{\mathrm{e}^{-x}} + 1 - \cancel{\mathrm{e}^{-x}} + 1}{\mathrm{e}^{-x} + 1} \\
&= \frac{2}{\mathrm{e}^{-x} + 1} && \text{La réponse } \textbf{a.} \text{ est correcte.} \\
&= \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{-x} + 1)} && \text{On multiplie par } \mathrm{e}^x \text{ numérateur et dénominateur.} \\
&= \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}
\end{aligned}$$

Réponse : a. et b.

5. $(\mathrm{e}^x - 1)(1-x)$ est un produit, donc pour résoudre l'inéquation, on dresse un tableau de signes.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^x - 1 & > & 0 \\ \mathrm{e}^x & > & 1 \\ \mathrm{e}^x & > & \mathrm{e}^0 \\ x & > & 0 \end{array}$$

A connaître

C'est une inéquation qu'il faut savoir résoudre mentalement (utilisez la représentation graphique.

$x \longmapsto 1-x$ est une fonction affine.

On a donc le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\mathrm{e}^x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(\mathrm{e}^x-1)(1-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D'où $\mathscr{S} = [0\ ;\ 1]$.

Réponse : b.

6. On décompose f comme la somme de deux fonctions : g et h qui sont définies par $g(x) = x\mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = -1$.
g et h sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

g est un produit de deux fonctions u et v définies par $u(x) = x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{2x}$.

$g'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$.

$$g'(x) = \underbrace{1}_{u'(x)} \times \underbrace{\mathrm{e}^{2x}}_{v(x)} + \underbrace{x}_{u(x)} \times \underbrace{2\mathrm{e}^{2x}}_{v'(x)} = \mathrm{e}^{2x} + 2x\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}(2x+1)$$

Comme $h'(x) = 0$, on en déduit que $f'(x) = g'(x) + 0 = \mathrm{e}^x(2x+1)$.

Réponse : d.

7. On décompose f comme la somme de deux fonctions : g et h qui sont définies par $g(x) = \mathrm{e}^x(x-1)$ et $h(x) = x^2$.
g et h sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

g est un produit de deux fonctions u et v définies par $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x-1$.

$g'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$.

$$g'(x) = \underbrace{\mathrm{e}^x}_{u'(x)} \times \underbrace{(x-1)}_{v(x)} + \underbrace{\mathrm{e}^x}_{u(x)} \times \underbrace{1}_{v'(x)} = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x$$

Comme $h'(x) = 2x$, on en déduit que :

$$f'(x) = g'(x) + 2x = x\mathrm{e}^x + 2x = x(\mathrm{e}^x + 2)$$

Automatisme

Factorisez la dérivée afin d'en déduire son signe.

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x + 2 > 0$. On dresse le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{e}^x + 2$		$+$		$+$	
x		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Réponse : a., c. et d.