MATHEMATIQUES

Probabilités conditionnelles et indépendance : entraînement savoir-faire (corrigé)

Exercice 1

1. a. Comme on choisit un client au hasard parmi les clients du magasin, on peut interpréter l'information « 72 % des clients ont effectué un achat » par $P(A) = 0,72$.

b. « 54 % des clients sont des femmes ayant effectué un achat » s'interprète par $P(F \underbrace{\cap}_{\text{et}} A) = 0,54$.

Ensemble de référence

Ici les 72 % ont pour ensemble de référence les clients du magasin.
Il en est de même des 54 %. Ces deux probabilités ne sont pas des probabilités conditionnelles.

c. On sait que le client choisi est un homme, on peut donc interpréter « Parmi les clients hommes, 90 % ont effectué un achat » par $P_H(A) = 0,9$.

Mots-clés

Bien repérer les mots-clés qui indiquent qu'on a affaire à des probabilités conditionnelles. Ici le mot PARMI.

2. a. $P(H) = 0,2$ signifie que 20 % des clients du magasin sont des hommes.

b. $P(H \cap \overline{A}) = 0,02$ signifie que 2 % des clients du magasin sont des hommes qui n'ont pas effectué d'achats.

c. $P_A(F) = 0,75$ signifie que parmi les clients ayant effectué un achat, 75 % sont des femmes.

Proba conditionnelle

L'ensemble de référence de cette probabilité est l'ensemble des clients ayant effectué un achat.

Exercice 2

1. La sensibilité clinique est la probabilité que le test soit positif **sachant** que la personne est atteinte par la maladie. Il s'agit donc de $P_M(T)$.

2. La VPP est la probabilité que la personne soit atteinte de la maladie **sachant** que le test est positif, c'est $P_T(M)$.

Faites attention

Lisez et relisez bien les définitions données pour chacune des valeurs (sensibilité et VPP) afin de bien comprendre la situation. Vous pouvez également réécrire la définition avec le vocabulaire des probabilités conditionnelles.

3. On choisit une personne au hasard, il y a donc équiprobabilité :

$$P_M(T) = \frac{\text{Nombre de personnes malades ayant un test positif}}{\text{Nombre de personnes malades}} = \frac{340}{436} \simeq 0,78.$$

4. On choisit une personne au hasard, il y a donc équiprobabilité :

$$P_T(M) = \frac{\text{Nombre de personnes malades ayant un test positif}}{\text{Nombre de personnes ayant un test positif}} = \frac{340}{400} = 0,85.$$

Exercice 3

1. Le choix de la personne se fait au hasard. La loi est équirépartie.
Pour calculer la probabilité d'un événement A, on utilise la formule :

$$p(A) = \frac{\text{Nombre d'issues qui réalisent } A}{\text{Nombre total d'issues}}$$

a. La probabilité que ce soit un homme est donnée par :

$$\frac{\text{Nombre d'hommes}}{\text{Nombre total de personnes}} = \frac{72}{120} = \frac{3}{5}$$

b. La probabilité que ce soit une femme qui a des enfants est donnée par :

$$\frac{\text{Nombre de femmes ayant des enfants}}{\text{Nombre total de personnes}} = \frac{42}{120} = \frac{7}{20}$$

c. La probabilité que la personne n'ait pas d'enfants est donnée par :

$$\frac{\text{Nombre de personnes sans enfants}}{\text{Nombre total de personnes}} = \frac{17}{120}$$

2. La personne est choisie parmi les femmes. Ainsi, la probabilité qu'elle ait des enfants est donnée par :

$$\frac{\text{Nombre de femmes ayant des enfants}}{\text{Nombre de femmes}} = \frac{42}{48} = \frac{7}{8}$$

Explications

La probabilité que vous devez calculer est une probabilité conditionnelle. En effet, l'univers ici est constitué seulement des femmes (il y en a 48). Si on utilise les notations de la question 4, on note cette probabilité $p_F(E)$.

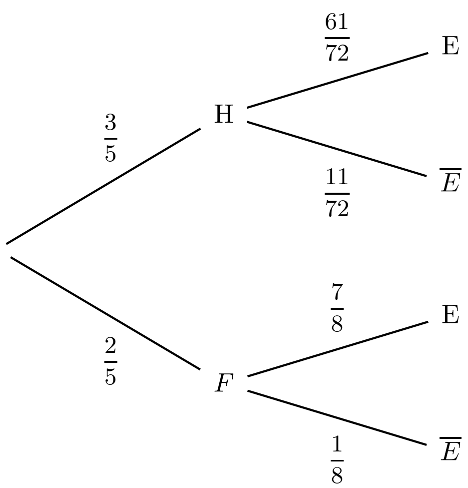
3. La personne est choisie parmi les personnes qui ont des enfants. Ainsi, la probabilité que ce soit une femme est donnée par :

$$\frac{\text{Nombre de femmes ayant des enfants}}{\text{Nombre de personnes qui ont des enfants}} = \frac{42}{103}$$

Remarque

Cette probabilité se note $p_E(F)$. Elle est évidemment différente de la probabilité précédente, puisque l'ensemble de référence (l'univers) n'est pas le même.

4. Arbre complété :



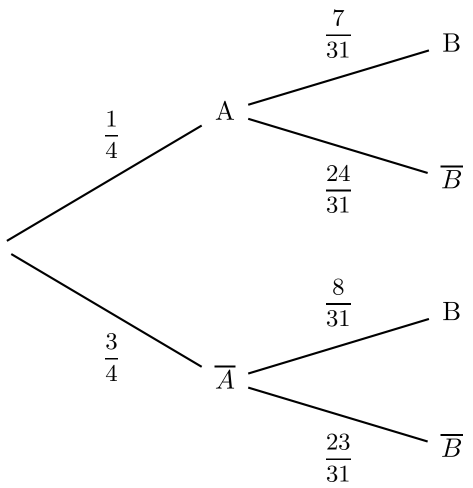
Exercice 4

- $p(A) = \dfrac{\text{Nombre de coeurs}}{\text{Nombre total de cartes}} = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$.

On a alors $p(\overline{A}) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

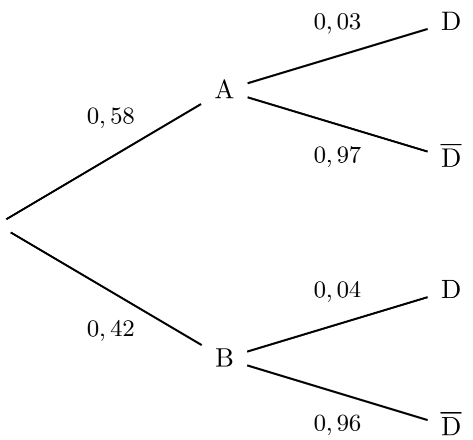
- La probabilité de tirer un coeur au deuxième tirage sachant qu'on a déjà tiré un coeur au premier est $p_A(B) = \dfrac{\text{Nombre de coeurs qui restent}}{\text{Nombre de cartes qui restent}} = \dfrac{7}{31}$. Aussi, la probabilité de ne pas tirer un coeur au deuxième tirage sachant qu'on a tiré un coeur au premier tirage est $p_A(\overline{B}) = 1 - \dfrac{7}{31} = \dfrac{24}{31}$.

- La probabilité de tirer un coeur au deuxième tirage sachant qu'on n'a pas tiré un coeur au premier est $p_{\overline{A}}(B) = \dfrac{\text{Nombre de coeurs qui restent}}{\text{Nombre de cartes qui restent}} = \dfrac{8}{31}$. Ainsi, la probabilité de ne pas tirer un coeur au deuxième tirage sachant qu'on n'a pas tiré un coeur au premier tirage est $p_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - \dfrac{8}{31} = \dfrac{23}{31}$.



Exercice 5

1. Arbre pondéré résumant la situation :



2. Calcul des probabilités.

a. $P(\text{B} \cap \text{D}) = P(\text{B}) \times P_{\text{B}}(\text{D}) = 0{,}42 \times 0{,}04 = 0,0168$.

La probabilité qu'un ordinateur provienne du fabricant B et soit défectueux est de $0,0168$.

Remarque

La probabilité de l'intersection de deux événements est donnée par le produit des probabilités inscrites sur les branches de l'arbre.

b. $P(\text{A} \cap \overline{\text{D}}) = P(\text{A}) \times P_{\text{A}}(\overline{\text{D}}) = 0{,}58 \times 0{,}97 = 0,5626$.

3. a. $P_{\text{D}}(\text{B}) = \dfrac{P(\text{D} \cap \text{B})}{P(\text{D})} = \dfrac{0,0168}{0,0342} \simeq 0{,}49.$

b. $P_{\overline{\text{D}}}(\text{B}) = \dfrac{P(\overline{\text{D}} \cap \text{B})}{P(\overline{\text{D}})} = \dfrac{P(\text{B}) \times P_{\text{B}}(\overline{\text{D}})}{1 - P(\text{D})} = \dfrac{0{,}42 \times 0{,}96}{1 - 0,0342} \simeq 0{,}417.$

Conseil

Traduisez toujours la probabilité que vous devez calculer avec les événements.

Exercice 6

Les événements A, B et C forment une partition de l'univers.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(\text{M}) &= P(\text{A} \cap \text{M}) + P(\text{B} \cap \text{M}) + P(\text{C} \cap \text{M}) \\ &= P(\text{A}) \times P_{\text{A}}(\text{M}) + P(\text{B}) \times P_{\text{B}}(\text{M}) + P(\text{C}) \times P_{\text{C}}(\text{M}) \\ &= 0{,}25 \times 0{,}4 + 0{,}45 \times 0{,}8 + 0{,}3 \times 0{,}5 \\ &= 0{,}61 \end{aligned}$$

Conseil

Ecrivez les calculs avec les événements avant de passer à l'application numérique.