Lycée Louise Michel TES
2018/2019

MATHEMATIQUES
DS n°1 (corrigé)

Exercice 1

1. a. $f(-2) = 5$.

b. Le maximum de f est 6. Il est atteint lorsque $x = 4$.
Le minimum de f est -8. Il est atteint lorsque $x = 8$.

2. Tableau de signes de $f'(x)$.

x	-2		0		4		8		9
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Explications

Le sens de variation de la fonction donne le signe de la dérivée. Plus précisément, si la fonction f est croissante, la fonction dérivée f' est positive et si f est décroissante, f' est négative.

3. L'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions x_1, x_2 et x_3.

x	-2	x_1	0	x_2	4	x_3	8	9
$f(x)$	5 ↘	0 ↘	-3 ↗	0 ↗	6 ↘	0 ↘	-8 ↗	-2

4. Tableau de signes de $f(x)$:

x	-2		x_1		x_2		x_3		9
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 2

1. Dérivée de la fonction C :

$$\begin{aligned} C'(x) &= 2 \times 2x - 30 + 50 \times \frac{1}{x^2} \\ &= 4x - 30 - \frac{50}{x^2} \\ &= \frac{4x \times x^2}{x^2} - \frac{30x^2}{x^2} - \frac{50}{x^2} \\ &= \frac{4x^3 - 30x^2 - 50}{x^2} \end{aligned}$$

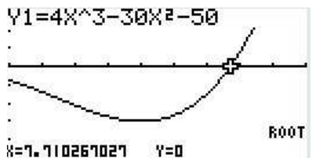
2. a. Les variations de g se déduisent du signe de sa dérivée.
$g'(x) = 4 \times 3x^2 - 30 \times 2x = 12x^2 - 60x$.

$\Delta = 3600$,
$x_1 = \dfrac{-(-60)+\sqrt{3600}}{2 \times 12} = 5$ et
$x_2 = \dfrac{-(-60)-\sqrt{3600}}{2 \times 12} = 0$.
Le trinôme est du signe de a sauf entre ses racines. On en déduit le tableau de variations :

Autrement

On pouvait aussi factoriser $12x^2 - 60x$ en $x(12x - 60)$ et déterminer le signe par produit..... comme on faisait en seconde : dans le tableau de signes on écrit deux lignes (une avec x et l'autre avec $12x - 60$), puis on utilise la règle des signes.

x	1		5		α		10
$g'(x)$		$-$	0	$+$			
$g(x)$	-76	$\searrow$	-300	$\nearrow$	0	$\nearrow$	950



Calculatrice

Utilisez votre calculatrice pour vérifier vos variations. On obtient cette représentation avec $X_{Min} = 1$, $X_{Max} = 10$, $X_{Scale} = 1$ $Y_{Min} = -500$, $Y_{Max} = 300$ et $Y_{Scale} = 100$.

Avec le solveur graphique Gsolv G-Solv F5, puis ROOT, on obtient une valeur approchée de α.

b. Equation $g(x) = 0$.
- g est continue sur $[5\ ;\ 10]$;
- g est strictement croissante sur $[5\,;\,10]$;
- $0 \in [-300\,;\,950]$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $B(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[5\,;\,10]$.

Une valeur approchée de α à 10^{-2} près est $7,71$.

Sur l'intervalle $[1\ ;\ 5]$, l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution car le maximum de g sur cet intervalle est $-76 < 0$.

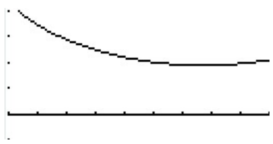
On déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1\ ;\ 10]$.

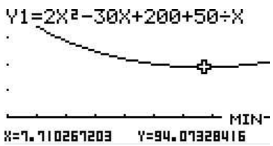
c. De la question précédente, on en déduit le tableau de signes :

x	1		α		10
$g(x)$		$-$	0	$+$	

3. On remarque que $C'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ et comme on vient de déterminer le signe de $g(x)$ on va pouvoir obtenir le signe de $C'(x)$.

x	1		$\alpha \simeq 7{,}71$		10
$g(x)$		$-$	0	$+$	
x^2		$+$		$+$	
$C'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$		$-$	0	$+$	
$C(x)$	222	$\searrow$	$94{,}07$	$\nearrow$	105





Calculatrice

Utilisez votre calculatrice pour vérifier vos variations. On obtient cette représentation avec $X_{Min} = 1$, $X_{Max} = 10$, $X_{Scale} = 1$ $Y_{Min} = -50$, $Y_{Max} = 200$ et $Y_{Scale} = 50$.

Avec le solveur graphique Gsolv G-Solv F5, MIN et Y-CAL (pour les images de 1 et 10) on obtient les valeurs remarquables.

4. a. Pour 10 tonnes, le coût moyen en milliers d'euros est donné par $C(10) = 105$ soit 105 000 euros.

b. Le minimum de C est environ 94,07 obtenu pour $x \simeq 7,71$. Ainsi, le coût moyen est obtenu pour une production de 7,71 tonnes environ et ce coût est alors de 94 100 euros environ.

Exercice 3

1. Tableau de variations de la fonction f :

x	-7		-1		5		7
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	6	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

2. Tableau de signes de la fonction f :

x	-7		-6		5		7
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

3. L'inéquation $f(x) \leqslant 3$ a pour ensemble de solutions :

$$[-7\ ;\ -4] \cup [2\ ;\ 7]$$

Voir les traces graphiques sur le graphique ci-dessous.

> **Méthode**
> Pour résoudre cette inéquation graphiquement :
> • On trace la droite d'équation $y = 3$ (elle est horizontale).
> • On lit les abscisses des points de la courbe qui se situent sous ou sur cette droite.
> • On donne les solutions sous forme d'intervalle (ici c'est une réunion d'intervalles).

4. a. $f'(-3)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -3 soit au point A.
$f'(-3) = 1$ (voir les traces graphique pour la justification).

Une équation de la tangente en A est donnée par $y = mx + p$ avec $m = f'(-3) = 1$.

Ainsi, $y = 1x + p$ soit $y = x + p$.

> **Petite remarque**
> Quand on est grand, on n'écrit plus le 1 !

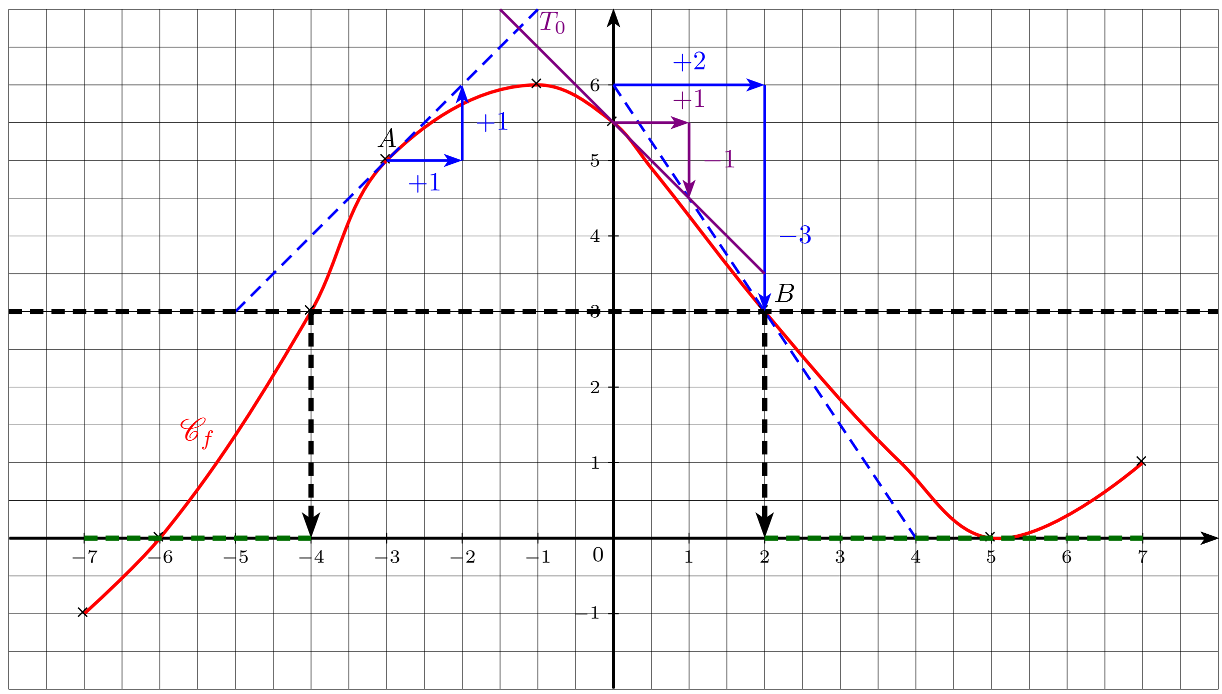
Pour déterminer p on utilise les coordonnées du point A qui sont $(-3\ ;\ 5)$ qui, évidemment est sur la droite.

On obtient $5 = -3 + p$ soit $p = 8$.

> **Pensez-y !**
> Vérifiez la cohérence avec le graphique. Ordonnée à l'origine égale 8. Oui c'est cohérent même si on ne le voit pas exactement sur le graphique.

Ainsi une équation de la tangente au point d'abscisse -3 est $y = x + 8$.

> **Autrement**
> On pouvez aussi utiliser l'équation de la tangente $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ avec $a = -3$. On trouve la même équation.



b. Graphiquement, une équation de la tangente au point B est : $y = \underbrace{-\frac{3}{2}}_{\text{Coefficient directeur}} x + \underbrace{6}_{\text{Ordonnée à l' origine}}$. (Voir les traces graphiques).

c. Voir sur le graphique.