MATHEMATIQUES
DS n°3 (corrigé)

Exercice 1

1. a. Elle dépense le quart des 20 euros de départ, donc il lui reste les trois quarts de la somme, soit 15 euros. Puis elle ajoute 20 euros. Donc elle aura 35 euros le mois suivant. Donc :

$$u_1 = 35$$

b. $u_2 = 0,75 \times 35 + 20 = 46,25$.

2. a. On complète le tableau ci-dessous qui retrace les différentes étapes de l'exécution de l'algorithme en arrondissant les résultats au centième :

Valeur de U	20	35	46,25	54,69	61,02	67,76	69,32	71,99
Valeur de N	0	1	2	3	4	5	6	7
Condition $U < 70$	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux

b. Cet algorithme affiche la valeur $N = 7$; donc au bout du 7e mois la somme disponible sera supérieure à 70 euros.

3. Pour tout entier n, on pose $v_n = u_n - 80$.

a. Pour tout entier n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 80 \\ &= 0,75 \times u_n + 20 - 80 \\ &= 0,75 \times u_n - 60 \\ &= 0,75 \left(u_n - \frac{60}{0,75} \right) \\ &= 0,75 \times (u_n - 80) \\ &= 0,75 \times v_n \end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,75$.

b. $v_0 = u_0 - 80 = 20 - 80 = -60$.

c. Pour tout entier n, $v_n = v_0 \times q^n = -60 \times 0,75^n$.
De plus $u_n = v_n + 80 = -60 \times 0,75^n + 80 = 80 - 60 \times 0,75^n$.

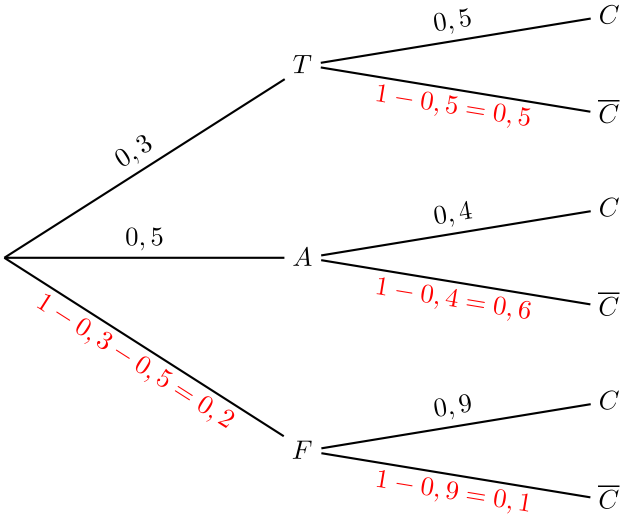
d. Pour trouver le montant que Maya possèdera dans sa tirelire au 1er juin 2019, on cherche la somme disponible fin mai 2019, ce qui correspond à $n = 12$: $u_{12} = 80 - 60 \times 0,75^{12} \approx 78,10$.
Maya aura dans sa tirelire le 1er juin 2019 78,10 €.

e. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} -60 \times 0,75^n = 0$ car $0 < 0,75 < 1$.

f. Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} 80 - 60 \times 0,75^n = 80$. Donc la limite de la suite (u_n) est égale à 80 ; cela signifie que le contenu de la tirelire va avoir tendance à se stabiliser vers 80 € au bout d'un certain temps.

Exercice 2

1. Ci-dessous, l'arbre de probabilités complété :



2. $P(A \cap C) = P_A(C) \times P(A) = 0,4 \times 0,5 = 0,20.$

3. Formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(T \cap C) + P(A \cap C) + P(F \cap C) \\ &= P_T(C) \times P(T) + P_A(C) \times P(A) + P_F(C) \times P(F) \\ &= 0,3 \times 0,5 + 0,5 \times 0,4 + 0,2 \times 0,9 \\ &= 0,53 \end{aligned}$$

4. $P_C(A) = \dfrac{P(A \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,2}{0,53} \approx 0,38.$

Partie B

1. On répète de manière identique et indépendante (situation assimilée à un tirage avec remise) 10 fois de suite cette épreuve. Il s'agit d'un schéma de Bernoulli donc la variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,3$.

2. $P(Y = 3) = \dbinom{10}{3} \times 0,3^3 \times (1 - 0,3)^{10-3} \approx 0,27.$

3. $P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0) = \dbinom{10}{0} \times 0,3^0 \times (1 - 0,3)^{10-0} = 1 - (1 - 0,3)^{10} \approx 0,97.$

Exercice 3

f est la fonction définie sur $[0\,;\,12]$ par $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$.

Partie A

1. **a.** Le taux d'alcoolémie va croître la première heure, puis décroître les 9 heures suivantes.

b. Le taux d'alcoolémie de cette personne est maximal au bout d'une heure ; il vaut alors $f(1)$ soit environ $0,74$ g/L.

2. Au bout de 3 heures, le taux d'alcoolémie est 0,3 g/L et $0,3 < 0,5$. On en déduit qu'au bout de 3 heures, l'automobiliste a le droit de conduire.

Partie B

1. Le taux d'alcoolémie au bout de 4 heures et 15 minutes est donnée par $f(4,25)$.
$f(4,25 = 2 \times 4,25\mathrm{e}^{-4,25} = 8,5\mathrm{e}^{-4,25}$ (valeur exacte).
$f(4,25) \simeq 0,12$.
Le taux d'alcoolémie au bout de 4 heures et 15 minutes est d'environ 0,12 g/L.

2. $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$ donc $f'(x) = 2 \times \mathrm{e}^{-x} + 2x \times (-1)\mathrm{e}^{-x} = -2x\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x}$.

3. **a.** Pour dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,12]$, on cherche le signe de $f'(x)$ sur cet intervalle ; $f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x} = 2\,(1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$
Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$ donc s'annule et change de signe pour $x = 1$.
$f(0) = 0$; $f(1) = 2\mathrm{e}^{-1} \approx 0,74$ et $f(12) = 24\mathrm{e}^{-12} \approx 1,5 \times 10^{-4}$

x	0		1		12
$1-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	$24\mathrm{e}^{-12}$

b. $f(0) = 0 < 0,5$, $f(1) \approx 0,74 > 0,5$ et $f(12) \approx 1,5 \times 10^{-4} < 0,5$
On complète le tableau de variations de la fonction f :

x	0	α	1	β	12
$f(x)$	0	$0,5$	$2\mathrm{e}^{-1} > 0,5$	$0,5$	$24\mathrm{e}^{-12} < 0,5$

On en déduit que l'équation $f(x) = 0,5$ admet deux solutions sur l'intervalle $[0\,;12]$.
À l'aide du solveur de la calculatrice, on trouve pour valeurs approchées au centième des solutions de l'équation $f(x) = 0,5$ les nombres $0,36$ et $2,15$.

c. Le Code de la route interdit toute conduite d'un véhicule lorsque le taux d'alcoolémie est supérieur ou égal à 0,5 g/L.
Une fois l'alcool consommé, on cherche au bout de combien de temps le taux d'alcoolémie de l'automobiliste reprend une valeur conforme à la législation ; il faut que $f(x)$ redevienne inférieur à $0,5$ donc que le temps soit supérieur à $2,15$ heures soit 2 h 9 min.