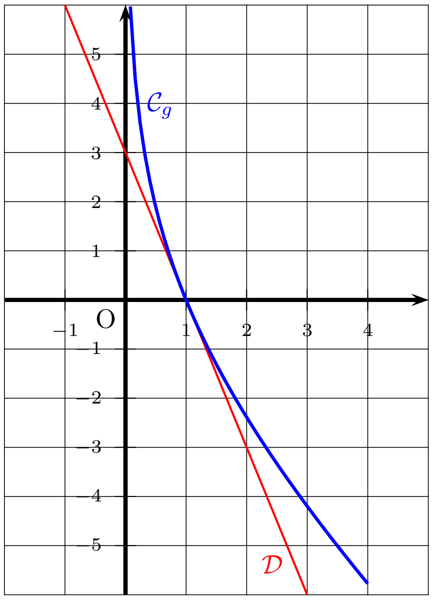
MATHEMATIQUES
Devoir surveillé n°4 (1 heure)

Exercice 1

Partie A



On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = 1 - x - 2\ln x$$

et représentée ci-contre par la courbe $\mathcal{C}_g$.

1. **a.** Que semble représenter la droite $\mathcal{D}$ pour la courbe $\mathcal{C}_g$?

b. Utiliser le graphique pour trouver une équation de $\mathcal{D}$.

c. On désigne par g' la dérivée de g sur $]0\ ;\ +\infty[$.
Calculer $g'(x)$.

d. Calculer $g(1)$ puis $g'(1)$. La réponse à la question **1. a.** est-elle confirmée ? Justifier.

2. Déterminer, graphiquement, le signe de $g(x)$ sur $]0\,;\,3]$.

Partie B

Soit la fonction numérique f définie sur $[0{,}1\,;\,3]$ par

$$f(x) = 6x - x^2 - 4x\ln x.$$

1. Calculer $f'(x)$. Montrer que $f'(x) = 2g(x)$.

2. Utiliser le résultat de la question **2.** de la partie **A**, pour dresser le tableau de variations de la fonction f.

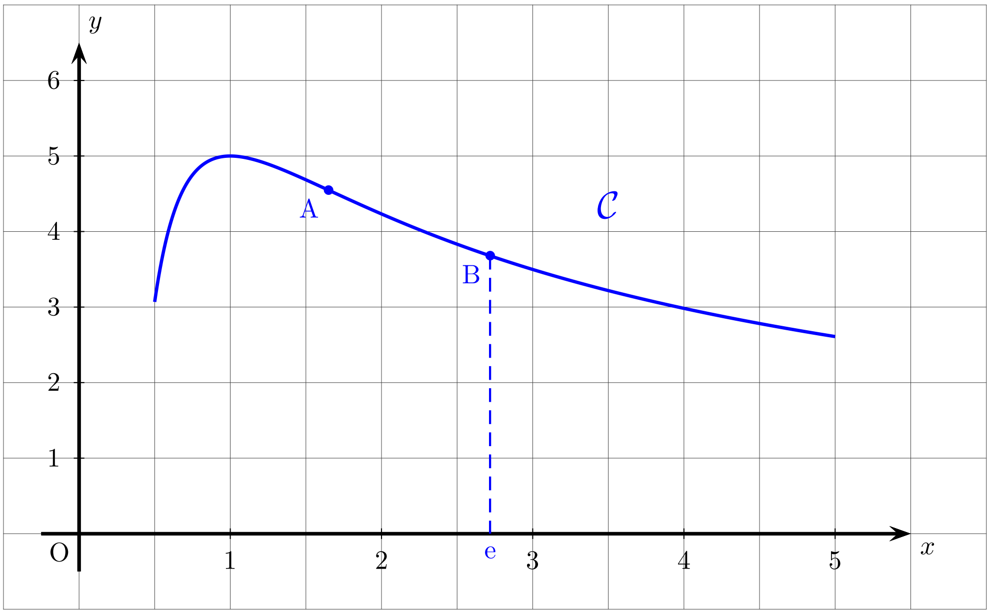
3. Etudier la convexité de la fonction f sur $[0,1\ ;\ 3]$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0{,}5\,;\,5]$ par :

$$f(x) = \frac{5 + 5\ln x}{x}.$$

Sa représentation graphique est la courbe $\mathcal{C}$ donnée ci-dessous dans un repère d'origine O. On admet que le point A placé sur le graphique est le seul point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[0{,}5\,;\,5]$. On note B le point de cette courbe d'abscisse e.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur cet intervalle.
On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f et f'' sa fonction dérivée seconde.



On admet que pour tout x de l'intervalle $[0{,}5\,;\,5]$ on a :

$$f'(x) = \frac{-5\ln x}{x^2} \qquad\qquad f''(x) = \frac{10\ln x - 5}{x^3}.$$

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, et justifier, de façon claire et concise, la réponse donnée.

- **Affirmation 1 :** La fonction f' est négative ou nulle sur l'intervalle $[1\,;\,5]$.
- **Affirmation 2 :** Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point B est égal à $-\dfrac{5}{\mathrm{e}^3}$.
- **Affirmation 3 :** La fonction f' est croissante sur l'intervalle $[2\,;\,5]$.
- **Affirmation 4 :** La valeur exacte de l'abscisse du point A de la courbe $\mathcal{C}$ est égale à $\mathrm{e}^{0{,}5}$.