MATHEMATIQUES
DS n°4 (corrigé)

Exercice 1

Partie A

1. a. La droite $\mathcal{D}$ semble être la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1.

b. L'ordonnée à l'origine vaut 3 et le coefficient directeur -3, on en déduit que $\mathcal{D}$ a pour équation $y = -3x + 3$.

c. $g'(x) = -1 - \dfrac{2}{x}$.

d. $g(1) = 1 - 1 - 2\ln 1 = 0$ et $g'(1) = -1 - \dfrac{2}{1} = -3$.
Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est donnée par $y = g'(1)(x-1) + g(1)$ soit $y = -3(x-1) + 0$ soit $y = -3x + 3$.
La réponse à la question **1.a.** est donc bien confirmée.

2. Par lecture graphique, on obtient :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	||	$+$	0	$-$	

Partie B

1. Calcul de $f'(x)$.
$f(x) = 6x - x^2 - \underbrace{4x\ln x}_{\text{Produit } u\times v}$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 6 - 2x - \left(\underbrace{4}_{u'(x)} \times \underbrace{\ln x}_{v(x)} + \underbrace{4x}_{u(x)} \times \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'(x)}\right)\\
&= 6 - 2x - (4\ln x + 4)\\
&= 6 - 2x - 4\ln x - 4\\
&= 2 - 2x - 4\ln x\\
&= 2(1 - x - 2\ln x)\\
&= 2 \times g(x)
\end{aligned}$$

2. Le signe de $f'(x)$ est donnée par le signe de $g(x)$ qui a été donné dans la partie **A**. On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	0,1		1		3
$f'(x) = 2g(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\simeq 1{,}51$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$\simeq 4{,}18$

3. Pour étudier la convexité de la fonction f, on étudie le signe de sa dérivée seconde.

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2 - \frac{4}{x} \\ &= \frac{-2x-4}{x} \end{aligned}$$

x	0,1 $\qquad\qquad$ 3
$-2x-4$	$-$
x	$+$
$f''(x)$	$-$
Convexité de f	f est concave

Exercice 2

1. Affirmation 1 : Vrai.
Graphiquement la fonction f est décroissante sur $[1 ; 5]$, donc sa dérivée est négative sur cet intervalle.
Par le calcul, comme $f'(x) = \dfrac{-5\ln x}{x^2}$, on obtient le tableau de signe :

x	0,5		1		5
-5		$-$		$-$	
$\ln x$		$-$	0	$+$	
x^2		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

La fonction f' est bien négative sur $[1 ; 5]$.

2. Affirmation 2 : Faux.
Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point B (l'abscisse de point est e) est donné par $f'(\mathrm{e})$.

$$f'(\mathrm{e}) = \frac{-5\times\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}^2} = \frac{-5}{\mathrm{e}^2} \neq -\frac{5}{\mathrm{e}^3}.$$

3. Affirmation 3 : Vrai.
Graphiquement, la fonction f est convexe, donc sa dérivée seconde est positive et par suite f' est croissante.

A savoir !
C'est le signe de la dérivée seconde f'' qui donne les variations de f'.

Par le calcul, on dresse la tableau de signe de $f''(x)$.

$$\begin{aligned} 10\ln x - 5 &\geqslant 0 \\ 10\ln x &\geqslant 5 \\ \ln x &\geqslant 0,5 \\ \ln x &\geqslant \ln \mathrm{e}^{0,5} \\ x &\geqslant \mathrm{e}^{0,5} \end{aligned}$$

Méthode
Pour obtenir le signe du numérateur, on est amené à résoudre une inéquation. Un peu d'initiative !

x	$0{,}5$		$\mathrm{e}^{0,5} \simeq 1{,}65$		5
$10\ln x - 5$		$-$	0	$+$	
x^3		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Puisque $\mathrm{e}^{0,5} < 2$, on en déduit que f' est croissante sur $[2\ ;\ 5]$.

4. **Affirmation 4 : Vrai**.
Le point A est le seul point d'inflexion d'après l'énoncé.
D'après le tableau précédent, la dérivée seconde s'annule et change de signe en $x_0 = \mathrm{e}^{0,5}$. On en déduit que le point d'abscisse $\mathrm{e}^{0,5}$ est un point d'inflexion.
C'est donc le point A.

Conseil
Lisez l'énoncé !

La valeur exacte de l'abscisse du point A est bien $\mathrm{e}^{0,5}$.