

**MATHEMATIQUES**  
**DS n°4 (corrigé)**

**Exercice 1**

**Partie A**

1. a. La droite  $\mathcal{D}$  semble être la tangente à  $\mathcal{C}_g$  au point d'abscisse 1.

b. L'ordonnée à l'origine vaut 3 et le coefficient directeur  $-3$ , on en déduit que  $\mathcal{D}$  a pour équation  $y = -3x + 3$ .

c.  $g'(x) = -1 - \frac{2}{x}$ .

d.  $g(1) = 1 - 1 - 2 \ln 1 = 0$  et  $g'(1) = -1 - \frac{2}{1} = -3$ .

Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est donnée par  $y = g'(1)(x - 1) + g(1)$  soit  $y = -3(x - 1) + 0$  soit  $y = -3x + 3$ .

La réponse à la question 1.a. est donc bien confirmée.

2. Par lecture graphique, on obtient :

$x$	0	1	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

**Partie B**

1. Calcul de  $f'(x)$ .

$$f(x) = 6x - x^2 - \underbrace{4x \ln x}_{\text{Produit } u \times v}.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6 - 2x - \left( \underbrace{4}_{u'(x)} \times \underbrace{\ln x}_{v(x)} + \underbrace{4x}_{u(x)} \times \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'(x)} \right) \\ &= 6 - 2x - (4 \ln x + 4) \\ &= 6 - 2x - 4 \ln x - 4 \\ &= 2 - 2x - 4 \ln x \\ &= 2(1 - x - 2 \ln x) \\ &= 2 \times g(x) \end{aligned}$$

2. Le signe de  $f'(x)$  est donnée par le signe de  $g(x)$  qui a été donné dans la partie A. On en déduit le tableau de variations de la fonction  $f$  :

$x$	0,1	1	3
$f'(x) = 2g(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\simeq 1,51$	5	$\simeq 4,18$

3. Pour étudier la convexité de la fonction  $f$ , on étudie le signe de sa dérivée seconde.

$$f''(x) = -2 - \frac{4}{x}$$

$$= \frac{-2x - 4}{x}$$

$x$	0,1	3
$-2x - 4$		-
$x$		+
$f''(x)$		-
Convexité de $f$	$f$ est concave	

## Exercice 2

### 1. Affirmation 1 : Vrai.

Graphiquement la fonction  $f$  est décroissante sur  $[1 ; 5]$ , donc sa dérivée est négative sur cet intervalle.

Par le calcul, comme  $f'(x) = \frac{-5 \ln x}{x^2}$ , on obtient le tableau de signe :

$x$	0,5	1	5	
$-5$		-	-	
$\ln x$		-	0	+
$x^2$		+	+	+
$f'(x)$		+	0	-

La fonction  $f'$  est bien négative sur  $[1 ; 5]$ .

### 2. Affirmation 2 : Faux.

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point  $B$  (l'abscisse de point est  $e$ ) est donné par  $f'(e)$ .

$$f'(e) = \frac{-5 \times \ln(e)}{e^2} = \frac{-5}{e^2} \neq -\frac{5}{e^3}.$$

### 3. Affirmation 3 : Vrai.

Graphiquement, la fonction  $f$  est convexe, donc sa dérivée seconde est positive et par suite  $f'$  est croissante.

Par le calcul, on dresse la tableau de signe de  $f''(x)$ .

$$10 \ln x - 5 \geq 0$$

$$10 \ln x \geq 5$$

$$\ln x \geq 0,5$$

$$\ln x \geq \ln e^{0,5}$$

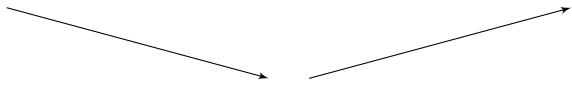
$$x \geq e^{0,5}$$

#### A savoir !

C'est le signe de la dérivée seconde  $f''$  qui donne les variations de  $f'$ .

#### Méthode

Pour obtenir le signe du numérateur, on est amené à résoudre une inéquation. Un peu d'initiative !

$x$	0,5	$e^{0,5} \simeq 1,65$	5
$10 \ln x - 5$	-	0	+
$x^3$	+		+
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$			

Puisque  $e^{0,5} < 2$ , on en déduit que  $f'$  est croissante sur  $[2 ; 5]$ .

**4. Affirmation 4 : Vrai.**

Le point  $A$  est le seul point d'inflexion d'après l'énoncé.

D'après le tableau précédent, la dérivée seconde s'annule et change de signe en  $x_0 = e^{0,5}$ . On en déduit que le point d'abscisse  $e^{0,5}$  est un point d'inflexion.

C'est donc le point  $A$ .

**Conseil**

Lisez l'énoncé !

La valeur exacte de l'abscisse du point  $A$  est bien  $e^{0,5}$ .