Lycée Louise Michel avril 2019
Terminale ES

MATHEMATIQUES
Devoir surveillé n°4 (1 heure)

Exercice 1 (7 points)

Une entreprise lance la production de batteries pour véhicules électriques.
Une étude a modélisé le rythme de la production journalière sur les six premiers mois à l'aide de la fonction f définie pour x compris entre 0 et 6 par :

$$f(x) = 1 - (x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

x représente le nombre de mois (de 30 jours) depuis le lancement du produit.
$f(x)$ représente la production journalière de batteries en milliers.

1. Montrer que la fonction F définie sur $[0\,;\,6]$ par $F(x) = x + (x+2)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f sur $[0\,;\,6]$.

2. Donner la valeur exacte puis une valeur arrondie à 10^{-3} de $I = \displaystyle\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Déterminer une valeur arrondie à 10^{-3} de la valeur moyenne, exprimée en milliers, de la production sur les six premiers mois.

Exercice 2 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = 4x\ln(x) - 3x^2$.

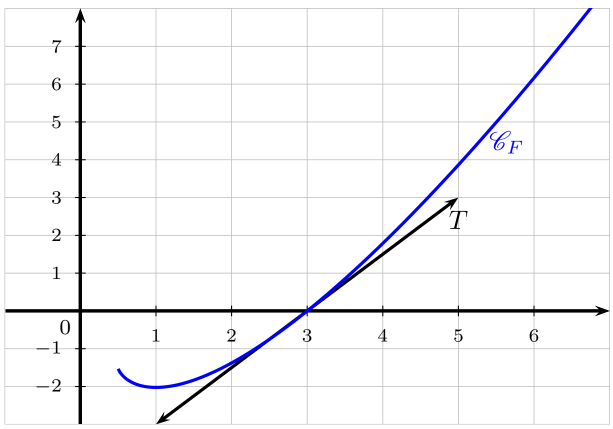
1. Calculer $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} 3x^2\,\mathrm{d}x$.

2. Démontrer que la fonction G définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $G(x) = 2x^2\ln(x) - x^2$ est une primitive de la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 4x\ln(x)$.

3. En utilisant les questions précédentes, calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3 (6 points)

La courbe $\mathscr{C}_F$ ci-contre représente une fonction F définie et derivable sur l'intervalle $\mathrm{J} = [0,5\,;\,+\infty[$.
La droite T est la tangente à $\mathscr{C}_F$ au point d'abscisse 3.
On sait que :
- $\mathscr{C}_F$ coupe l'axe des abscisses au point $(3\,;\,0)$;
- $\mathscr{C}_F$ a une tangente horizontale au point $(1\,;\,-2)$;
- T passe par le point de coordonnées $(5\,;\,3)$.



On note f la fonction dérivée de F.

1. À l'aide du graphique, donner les variations de F et en déduire le signe de f.

2. Donner sans justification $f(1)$, $F(1)$ et $F(3)$. Préciser la valeur de $f(3)$ en justifiant.

3. Calculer $\displaystyle\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.