MATHEMATIQUES
Interrogation n°4 (corrigé)

Exercice 1

a. $\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{x+(-x)} = \mathrm{e}^0 = 1$.

b. $\left(\mathrm{e}^{2x}\right)^2 \times \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2 = \mathrm{e}^{4x} \times \mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{2x}$.

c. $\dfrac{\mathrm{e}^{3x} \times \mathrm{e}^{4x}}{\mathrm{e}^{2x-1}} = \dfrac{\mathrm{e}^{7x}}{\mathrm{e}^{2x-1}} = \mathrm{e}^{7x-(2x-1)} = \mathrm{e}^{5x+1}$.

Exercice 2

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{3x-4} &= \mathrm{e}^{7x+3} \\ 3x-4 &= 7x+3 \\ 3x-7x &= 3+4 \\ -4x &= 7 \\ x &= -\frac{7}{4} \end{aligned}$$

$\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{7}{4}\right\}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2-x} &= 1 \\ \mathrm{e}^{2-x} &= \mathrm{e}^0 \\ 2-x &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$\mathscr{S} = \{2\}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2x} &> 1 \\ \mathrm{e}^{2x} &> \mathrm{e}^0 \\ 2x &> 0 \\ x &> 0 \end{aligned}$$

$\mathscr{S} =]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 3

a. $f_1'(x) = 2x + 3 + 4\mathrm{e}^x$.

b. f_2 est de la forme $u(x)v(x)$ avec $u(x) = x^2+1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 2x\mathrm{e}^x + \left(x^2+1\right)\mathrm{e}^x \\ &= \left(x^2+2x+1\right)\mathrm{e}^x \qquad \text{après factorisation} \end{aligned}$$

c. f_3 est de la forme $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x$.

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x \times x - \mathrm{e}^x \times 1}{x^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2} \qquad \text{après factorisation du numérateur} \end{aligned}$$

Exercice 4

1. a. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est de la forme $f = \dfrac{u}{v}$ et admet donc comme fonction dérivée $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ définie également sur $\mathbb{R}$:
$u(x) = 4x$ et donc $u'(x) = 4$.
$v(x) = \mathrm{e}^x$ et donc $v'(x) = \mathrm{e}^x$.

On obtient donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{4\mathrm{e}^x - 4x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} \\ &= \frac{(4-4x)\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} \\ &= \frac{4(1-x)\,\mathrm{e}^x}{e^x \times \mathrm{e}^x} \\ &= \frac{4(-x+1)}{e^x} \end{aligned}$$

b. On étudie dans un premier temps le signe de f' sur $\mathbb{R}$ puis on en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
4		$+$		$+$	
$-x+1$		$+$	0	$-$	
e^x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{4}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	

$f(1) = \dfrac{4 \times 1}{\mathrm{e}^1} = \dfrac{4}{\mathrm{e}}$

2.

Rappel
L'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est :$y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Ici $a = 0$, on a donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{T} : y &= f'(0)(x-0) + f(0) \\ &= \frac{4(-0+1)}{\mathrm{e}^0}x + \frac{4 \times 0}{\mathrm{e}^0} \\ &= \frac{4}{1}x + \frac{0}{1} \\ &= 4x \end{aligned}$$