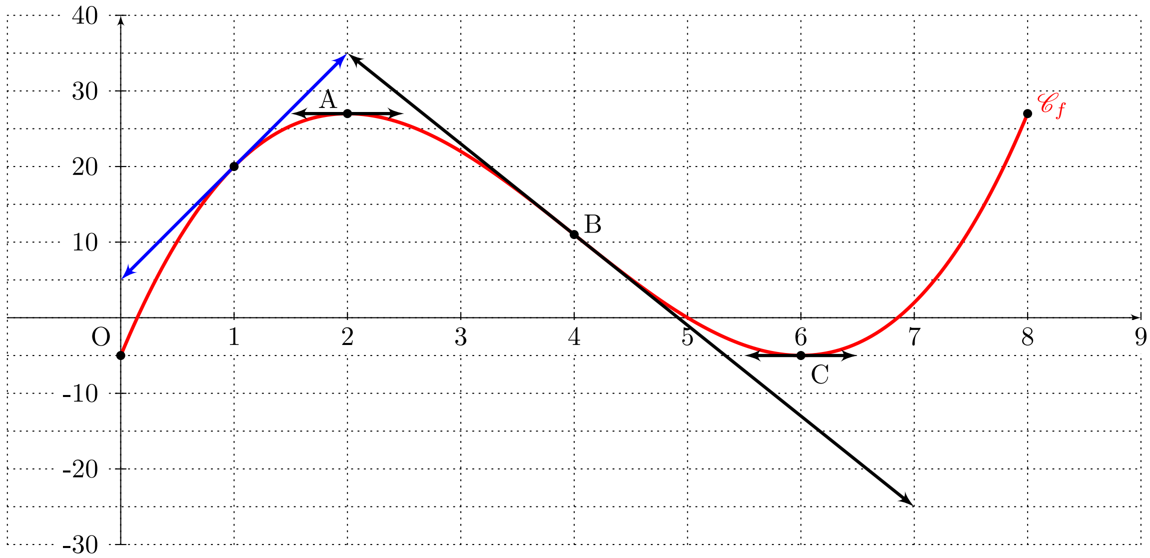
MATHEMATIQUES
Interrogation n°4 (corrigé)

On a représenté ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;8]$.
On a tracé les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points A, B et C d'abscisses respectives 2 ; 4 et 6.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.



- PARTIE A -

1. a. Donner les valeurs exactes de $f(1)$, $f(6)$, $f'(2)$, $f'(4)$ $f'(6)$.

$f(4) = 11$, $f(6) = -5$ car l'ordonnée des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 4 et 6 sont respectivement 11 (voir énoncé) et -5.
$f'(2) = 0$ et $f'(6) = 0$ car les tangentes à $\mathscr{C}_f$ au points A et C sont horizontales, donc de pente nulle.

b. Donner $f'(4)$.

$f'(4)$ correspond à la pente de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 4.
On remarque que les points de coordonnées $(2\,;35)$ et $(7\,;-25)$ appartiennent à cette tangente donc :
$f'(4) = \dfrac{-25-35}{7-2} = \dfrac{-60}{5} = -12$.

2. a. Étudier la convexité de f sur l'intervalle $[0\,;8]$.

La fonction f est concave sur $[0\,;4]$ puis convexe sur $[4\,;8]$.

b. Indiquer si la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion. Si oui, préciser ce point.

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet comme point d'inflexion le point B car elle change de concavité à partir de ce point. D'ailleurs, la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B traverse $\mathscr{C}_f$.

3. a. Déterminer le signe de f' sur l'intervalle $[2\,;4]$. Justifier.

Pour tout $x \in [2\ 4]$, $f'(x) \leqslant 0$ car la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[2\,;4]$.

b. Quel est de signe de la fonction f'' sur $[5\,;6]$? Justifier.

Pour tout $x \in [5\ 6]$, $f''(x) \geqslant 0$ car la fonction f est convexe sur l'intervalle $[5\,;6]$.

- PARTIE B -

La courbe $\mathscr{C}_f$ de la **PARTIE A** représente la fonction $f : x \longmapsto x^3 - 12x^2 + 36x - 5$ définie sur $[0\,;\,8]$.

1. a. Calculer $f'(x)$.
Pour tout $x \in [0\,;\,8]$, $f'(x) = 3x^2 - 12 \times 2x + 36 = 3x^2 - 24x + 36$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,8]$.

On commence par étudier le signe de la fonction trinôme f' en utilisant le discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-24)^2 - 4 \times 3 \times 36 = 144 > 0$.

On en déduit que f' s'annule en $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{24 - \sqrt{144}}{2 \times 3} = 2$ et $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{24 + \sqrt{144}}{2 \times 3} = 6$.
f' est du signe de a partout, sauf entre ses racines.

x	0		2		6		8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-5	$\nearrow$	27	$\searrow$	-5	$\nearrow$	27

2. a. Montrer que, pour tout $x \in [0\,;\,8]$, $f''(x) = 6x - 24$.

Pour tout $x \in [0\,;\,8]$, $f''(x) = 3 \times 2x - 24 = 6x - 24$.

b. En déduire la convexité de f sur $[0\,;\,8]$.

On doit étudier le signe de f'' sur $[0\,;\,8]$:

x	0		4		8
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	
Convexité de f		f est concave		f est convexe	

c. Justifier que le point B est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

La fonction dérivée seconde f'' s'annule ET change de signe en $x = 4$, soit l'abscisse du point B.

3. a. Monter que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 admet comme équation : $y = 15x + 5$.

L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

avec $f(1) = 20$ et $f'(1) = 15$.
Donc $y = 15(x - 1) + 20$ soit $y = 15x + 5$

b. Tracer cette tangente sur le graphique.

La droite passe par les points de coordonnées $(1\ ;\ 20)$ et $(0\ ;\ 5)$. (ordonnée à l'origine).