Lycée Louise Michel 19/11/2018
Terminale ES

MATHEMATIQUES
Corrigé du devoir surveillé n°2 (1 heure)

Exercice 1 **4 points**

1. a. On commence par calculer les premiers termes de la suite (u_n) :

$$u_0 = 3 \times 4^0 = 3 \times 1 = 3 \quad ; \quad u_1 = 3 \times 4^1 = 12 \quad ; \quad u_2 = 3 \times 4^2 = 48$$

La suite (u_n) **semble** géométrique car, en observant ses premiers termes, on remarque $u_1 = 4u_0$, $u_2 = 4u_1$ et $u_3 = 4u_2$ mais il reste à le montrer pour tout entier naturel n :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 3 \times 4^{n+1} = 3 \times 4^n \times 4^1 = \underbrace{3 \times 4^n}_{u_n} \times 4 = 4u_n$$

On en déduit que (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 4$ et de terme initial $u_0 = 3$.

b. On commence également par calculer les premiers termes de la suite (v_n) :

$$v_0 = 10 \quad ; \quad v_1 = \frac{1}{5}v_0 + 13 = \frac{1}{5} \times 10 + 13 = 15 \quad ; \quad v_2 = \frac{1}{5} \times v_1 + 13 = \frac{1}{5} \times 15 + 13 = 16$$

Or, $\dfrac{v_1}{v_0} = \dfrac{15}{10} = 1{,}5$ et $\dfrac{v_2}{v_2} = \dfrac{16}{15} \simeq 1,067$.
Ainsi $\dfrac{v_2}{v_1} \neq \dfrac{v_1}{v_0}$ et donc la suite (v_n) n'est pas géométrique.

2. a. La suite (w_n) est géométrique de raison $q = 0,88$ et de terme initial $w_0 = 60$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_{n+1} = w_n \times q = 0,88w_n \qquad \text{et} \qquad w_n = w_0 \times q^n = 60 \times 0,88^n$$

b. On rappelle que pour toute suite géométrique (w_n) de raison $q \neq 1$, la somme des n premiers termes est égale à :

$$w_0 + w_1 + \ldots + w_n = w_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Ici, $w_0 + w_1 + \ldots + w_{25} = w_0 \times \dfrac{1 - 0,88^{25+1}}{1 - 0,88} = \dfrac{60 \times \left(1 - 0,88^{26}\right)}{0,12} = 500 \times \left(1 - 0,88^{26}\right) \simeq 481,99$.

3. a. $0 < 0,7 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,7^n = 0$.

b. $\dfrac{5}{3} > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{5}{3}\right)^n = +\infty$.

Exercice 2 **6 points**

1. En utilisant la calculatrice, on trouve que $u_0 < u_1 < u_2 < .....$ et donc on conjecture que la suite est croissante.

2. Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 8 \\
&= 1,5u_n - 4 - 8 \\
&= 1,5u_n - 12 \\
&= 1,5(u_n - 8) \\
&= 1,5v_n
\end{aligned}$$

On en déduit que (v_n) est une suite géométrique de raison $1,5$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 8 = 2$.

3. **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = 2 \times 1,5^n$.

b. Comme $v_n = u_n - 8$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = v_n + 8 = 2 \times 1,5^n + 8$.

c. $u_{10} = 2 \times 1,5^{10} + 8 \simeq 123,33$.

4. La suite $(1,5)^n)$ est croissante car $1,5 > 1$.
En multipliant par 2, qui est positif, on ne change pas le sens de variations.
En ajoutant 8, on ne change pas non plus le sens de variation.
Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,5^n = +\infty$ car $1,5 > 1$
Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 \times 1,5^n = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 \times 1,5^n + 8 = +\infty$.