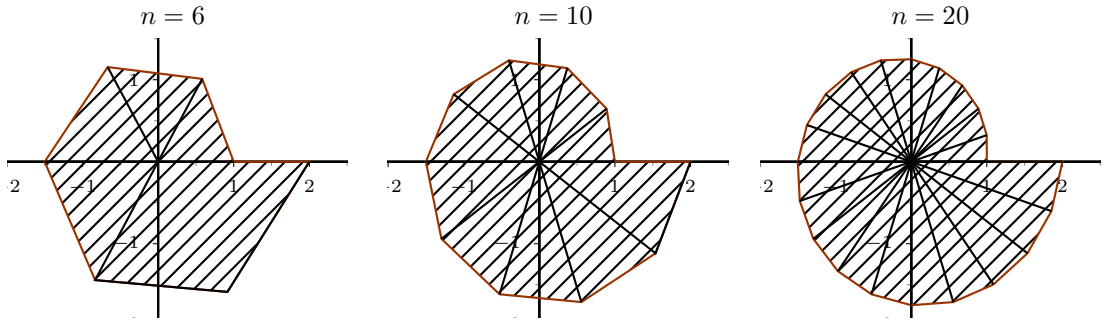
Lycée Louise Michel (Gisors)
Terminale S

MATHEMATIQUES
Complexes (2) : entraînement 2

Exercice 1

On veut modéliser dans le plan la coquille d'un nautile à l'aide d'une ligne brisée en forme de spirale. On s'intéresse à l'aire délimitée par cette ligne.

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout entier k allant de 0 à n, on définit les nombres complexes $z_k = \left(1+\dfrac{k}{n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$ et on note M_k le point d'affixe z_k.
Dans ce modèle, le pourtour du nautile est la ligne brisée reliant tous les points M_k avec $0 \leqslant k \leqslant n$.
Par exemple, pour les entiers $n = 6$, $n = 10$ et $n = 20$, on obtient les figures ci-dessous.



Partie A : Ligne brisée formée à partir de sept points

Dans cette partie, on suppose que $n = 6$. Ainsi, pour $0 \leqslant k \leqslant 6$, on a $z_k = \left(1+\dfrac{k}{6}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{6}}$.

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.

2. Vérifier que z_0 et z_6 sont des entiers que l'on déterminera.

3. Calculer la longueur de la hauteur issue de M_1 dans le triangle OM_0M_1 puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\dfrac{7\sqrt{3}}{24}$.

Partie B : Ligne brisée formée à partir de $n+1$ points
Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2.

1. Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, déterminer la longueur OM_k.

2. Pour k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, déterminer une mesure des angles $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OM_k}\right)$ et $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$.
En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM_k}\ ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$.

3. Pour k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, démontrer que la longueur de la hauteur issue de M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1} est égale à $\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right) \times \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$.

4. On admet que l'aire du triangle OM_kM_{k+1} est égale à $a_k = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) \times \left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)$ et que l'aire totale délimitée par la ligne brisée est égale à $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$.
L'algorithme suivant permet de calculer l'aire A_n lorsqu'on entre l'entier n :

$A \leftarrow 0$

Pour k allant de 0 à $n-1$
$\quad A \leftarrow A + \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) \times \left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)$
Fin Pour

On entre dans l'algorithme $n = 10$

Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui illustre le fonctionnement de l'algorithme.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,323	0,711	1,170	1,705	2,322	3,027	3,826	4,726		

5. On admet que $A_2 = 0$ et que la suite (A_n) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \dfrac{7\pi}{3} \approx 7,3$.

Recopier et compléter les pointillés de l'algorithme ci-après qui permet de déterminer le plus petit entier n tel que $A_n \geqslant 7,2$. On ne demande pas de déterminer n.

$n \leftarrow 2$
$A \leftarrow 0$
Tant que ....
  $n \leftarrow n+1$
  $A \leftarrow 0$
  Pour k allant de 0 à $n-1$
    $A \leftarrow A + \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) \times \left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)$
  Fin Pour
Fin Tant que
Afficher ....

Exercice 2

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Il est attribué **un point par réponse exacte correctement justifiée**. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v}\,)$.

Proposition 1

L'ensemble des points du plan d'affixe z tels que $|z-4| = |z+2\mathrm{i}|$ est une droite qui passe par le point A d'affixe 3i.

Proposition 2

Soit (E) l'équation $(z-1)\left(z^2-8z+25\right)=0$ où z appartient à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
Les points du plan dont les affixes sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle rectangle.

Proposition 3

$\dfrac{\pi}{3}$ est un argument du nombre complexe $\left(-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^8$.

Exercice 3

On se place dans le plan complexe rapporté au repère $(\mathrm{O}\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v}\,)$.
Soit f la transformation qui à tout nombre complexe z non nul associe le nombre complexe $f(z)$ défini par :

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

On note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$.

1. On appelle A le point d'affixe $a = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

a. Déterminer la forme exponentielle de a.

b. Déterminer la forme algébrique de $f(a)$.

2. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = 1$.

3. Soit M un point d'affixe z du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

a. Justifier que l'affixe z peut s'écrire sous la forme $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec θ un nombre réel.

b. Montrer que $f(z)$ est un nombre réel.

4. Décrire et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre réel.