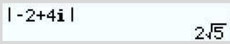
Lycée Louise Michel (Gisors)
Terminale S

MATHEMATIQUES
Complexes (2) : entraînement savoir-faire (corrigé)

Exercice 1

Calculatrice

La calculatrice permet d'obtenir le module d'un nombre complexe.
Par le menu RUN-MAT, puis OPTN, en sélectionnant CPLX (à l'aide de F3), on voit apparaître Abs qui nous permet d'obtenir par exemple le module de z_1 : 

$|z_1| = \sqrt{(-2)^2+4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

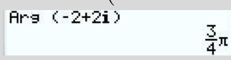
$|z_2| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

$|z_3| = \sqrt{\sqrt{3}^2+(-8)^2} = \sqrt{67}$

$|z_4| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{4}{9}} = \sqrt{\dfrac{25}{36}} = \dfrac{5}{6}$

Exercice 2

Calculatrice

La calculatrice permet d'obtenir un argument d'un nombre complexe.
Par le menu RUN-MAT, puis OPTN, en sélectionnant CPLX (à l'aide de F3), on voit apparaître Arg qui nous permet d'obtenir par exemple un argument de z_1 : 

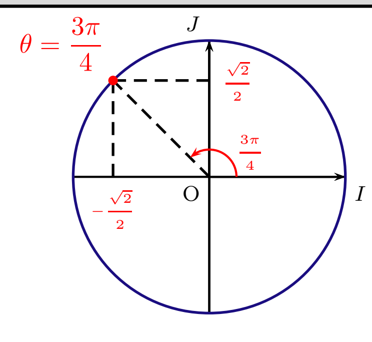
- On calcule le module de z_1 :$|z_1| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = 2\sqrt{2}$.

  On a :

  $$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\frac{-2}{2\sqrt{2}}+\mathrm{i}\frac{2}{2\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\underbrace{\frac{-\sqrt{2}}{2}}_{\cos\theta}+\mathrm{i}\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\sin\theta}\right).$$

  Autrement

  Je ne procède pas comme ça, mais vous pouvez si vous préférez :
  θ vérifie :
  $\cos(\theta) = \dfrac{x}{|z|} = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{y}{|z|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

  On cherche une valeur de θ telle que :

  $$\left.\begin{array}{l}\cos(\theta) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\[2ex] \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\}\quad \theta = \frac{3\pi}{4}\quad [2\pi]$$

  Ainsi, $\arg(z_1) = \dfrac{3\pi}{4}\quad [2\pi]$.

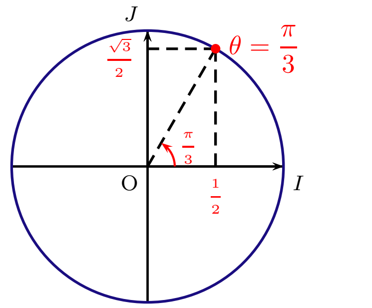
- On calcule le module de z_2 :$|z_2| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$.

  On a $z_2 = 2\left(\underbrace{\dfrac{1}{2}}_{\cos\theta}+\mathrm{i}\underbrace{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}_{\sin\theta}\right)$.

On cherche une valeur de θ telle que :

$$\left.\begin{array}{l}\cos(\theta)=\dfrac{1}{2}\\[2ex] \sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\ \theta=\frac{\pi}{3}\quad[2\pi]$$

Ainsi, $\arg(z_2)=\dfrac{\pi}{3}\quad[2\pi]$.



Sans calcul

Visualisez le point dont l'affixe est $-5\mathrm{i}$ dans un repère. Il se situe sur l'axe des imaginaires purs (côté négatif), et du coup on trouve facilement un argument.

- $\arg(z_3)=-\dfrac{\pi}{2}\quad[2\pi]$.

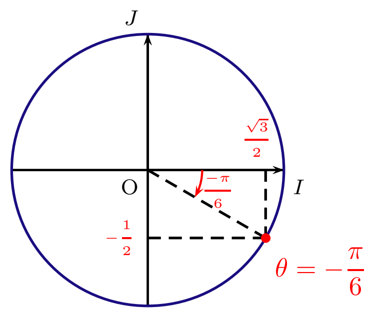
- On calcule le module de z_4 :$|z_4|=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2}=4$.

On a $z_4=4\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{4}-\mathrm{i}\dfrac{2}{4}\right)=4\left(\underbrace{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos\theta}+\mathrm{i}\underbrace{\dfrac{-1}{2}}_{\sin\theta}\right)$.

On cherche une valeur de θ telle que :

$$\left.\begin{array}{l}\cos(\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\[2ex] \sin\theta=\dfrac{-1}{2}\end{array}\right\}\ \theta=-\frac{\pi}{6}\quad[2\pi]$$

Ainsi, $\arg(z_4)=-\dfrac{\pi}{6}\quad[2\pi]$.



Exercice 3

1. On cherche à écrire z sous la forme $r(\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta))$ avec $r=|z|$ et $\theta=\arg(z)\quad[2\pi]$.

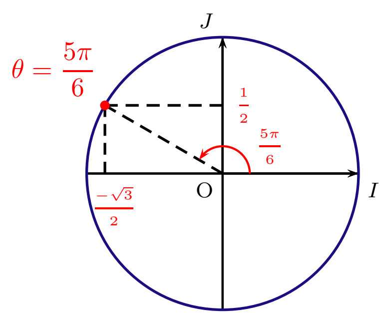
- On commence par déterminer le module de z :$|z|=\sqrt{(-4\sqrt{3})^2+4^2}=\sqrt{48+16}=\sqrt{64}=8$.
- On factorise par le module de z, soit 8 :

$z=8\left(\dfrac{-4\sqrt{3}}{8}+\mathrm{i}\dfrac{4}{8}\right)=8\left(\underbrace{\dfrac{-\sqrt{3}}{2}}_{\cos\theta}+\mathrm{i}\underbrace{\dfrac{1}{2}}_{\sin\theta}\right)$.

On cherche une valeur de θ telle que :

$$\left.\begin{array}{l}\cos(\theta)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\[2ex] \sin\theta=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\ \theta=\frac{5\pi}{6}\quad[2\pi]$$

Ainsi, $\arg(z)=\dfrac{5\pi}{6}\quad[2\pi]$.



On en déduit que $z=8\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$.

2. $z=r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))=6\times\left(\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)=6\times\left(-\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-3-3\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Exercice 4

- On commence par déterminer le module de $\sqrt{3}-\mathrm{i}$:

Méthode

Les quatre nombres sont fabriqués à partir des deux nombres complexes : $\sqrt{3}-\mathrm{i}$ et $1+\mathrm{i}$.
Après avoir calculé leur module et argument, on pourra calculer les modules et arguments demandés en utilisant les propriétés.

$$|\sqrt{3}-\mathrm{i}| = \sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2.$$

- On cherche θ telle que $\cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = -\dfrac{1}{2}$.

  On obtient $\theta = -\dfrac{\pi}{6} \quad [2\pi]$.

- $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$ et $\arg(1+\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{4} \quad [2\pi]$.

Sans calcul

Pas de calcul écrit pour ce nombre complexe !!!! Calcul mental

Propriétés des modules et des arguments

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.

- $|zz'| = e|z||z'|$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|z^n| = |z|^n$
- $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\arg(z^n) = n\arg(z) \quad [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$

- $|z_1| = |\sqrt{3}-\mathrm{i}| \times |1+\mathrm{i}| = 2\sqrt{2}$.

  $\arg(z_1) = \arg(\sqrt{3}-\mathrm{i}) + \arg(1+\mathrm{i}) = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12} \quad [2\pi]$.

- $|z_2| = \left|(1+\mathrm{i})^5\right| = |1+\mathrm{i}|^5 = \sqrt{2}^5 = 4\sqrt{2}$.

  $\arg(z_2) = \arg\left((1+\mathrm{i})^5\right) = 5 \times \arg(1+\mathrm{i}) = 5 \times \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{3\pi}{4} \quad [2\pi]$.

- $|z_3| = \left|\dfrac{1}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\right| = \dfrac{1}{|\sqrt{3}-\mathrm{i}|} = \dfrac{1}{2}$.

  $\arg(z_3) = \arg\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}-i}\right) = -\arg(\sqrt{3}-\mathrm{i}) = -\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{6} \quad [2\pi]$.

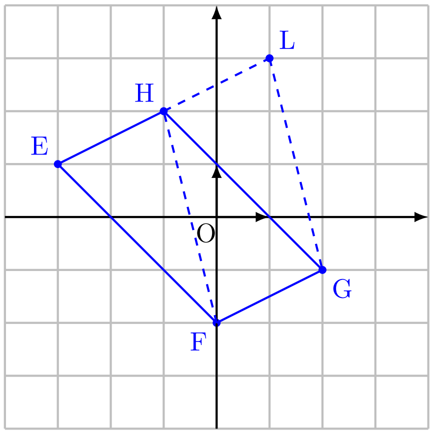
- $|z_4| = \left|\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+\mathrm{i}}\right| = \dfrac{|\sqrt{3}-\mathrm{i}|}{|1+i|} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

  $\arg(z_4) = \arg\left(\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right) = \arg(\sqrt{3}-\mathrm{i}) - \arg(1+\mathrm{i}) = -\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{5\pi}{12} \quad [2\pi]$.

Exercice 5

1. $EFGH$ est un parallélogramme si et seulement si $z_{\overrightarrow{FG}} = z_{\overrightarrow{EH}}$

$$\begin{aligned}
z_{\overrightarrow{FG}} &= z_{\overrightarrow{EH}} \\
z_G - z_F &= z_H - z_E \\
(2 - \mathrm{i}) - (-2\mathrm{i}) &= z_H - (-3 + \mathrm{i}) \\
2 + \mathrm{i} &= z_H + 3 - \mathrm{i} \\
z_H &= -1 + 2\mathrm{i}
\end{aligned}$$



2. On a $z_{\overrightarrow{FG}} = 2 + \mathrm{i}$

et $z_{\overrightarrow{HL}} = z_L - z_H = (1 + 3\mathrm{i}) - (-1 + 2\mathrm{i}) = 2 + \mathrm{i}$.

On en déduit que $z_{\overrightarrow{FG}} = z_{\overrightarrow{FG}}$ et donc que $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{HL}$.

Par conséquent, $FGLH$ est un parallélogramme.

Exercice 6

On montre que les trois côtés du triangle OAB sont de même longueur.

- $OA = |a| = \left|\dfrac{-3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{3}\right| = \dfrac{|-3-\mathrm{i}\sqrt{3}|}{|3|} = \dfrac{\sqrt{(-3)^2+(-\sqrt{3})^2}}{3} = \dfrac{\sqrt{12}}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.
- $OB = |b| = |\bar{a}| = |a| = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = OA$.
- $AB = |b-a| = \left|\dfrac{-3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{3} - \dfrac{-3-i\sqrt{3}}{3}\right| = \dfrac{|2i\sqrt{3}|}{3} = \dfrac{\sqrt{12}}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

$OA = OB = OC$ dont OAB est un triangle équilatéral.

Exercice 7

On cherche une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BA}\,,\,\overrightarrow{BC}\right)$:

$$\begin{aligned}\frac{c-b}{a-b} &= \frac{(4+\mathrm{i})-(2+3\mathrm{i})}{(-2-\mathrm{i})-(2+3\mathrm{i})}\\ &= \frac{2-2\mathrm{i}}{-4-4\mathrm{i}}\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{i}\end{aligned}$$

Méthode et cours

Pour montrer que le triangle est rectangle, on calcule une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BA}\,,\,\overrightarrow{BC}\right)$. Elle doit être égale à $\dfrac{\pi}{2}\quad[\pi]$.

$\left(\overrightarrow{BA}\,,\,\overrightarrow{BC}\right) = \arg\left(\dfrac{c-b}{a-b}\right)$.

$\left(\overrightarrow{BA}\,,\,\overrightarrow{BC}\right) = \arg\left(\dfrac{c-b}{a-b}\right) = \arg\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \dfrac{\pi}{2}\quad[2\pi]$.

Donc ABC est rectangle en B.

Exercice 8

Propriétés

Pour tous réels θ et θ' :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}\quad ;\quad \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\quad ;\quad \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}\quad ;\quad \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$$

1. On cherche à écrire z sous la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)\quad[2\pi]$.

- On commence par déterminer le module de z :$|z| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2+(-2)^2} = \sqrt{12+4} = 4$.
- On cherche une valeur de θ telle que $\cos(\theta) = \dfrac{x}{|z|} = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{y}{|z|} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$.

  On obtient $\theta = -\dfrac{5\pi}{6}\quad[2\pi]$ soit $\arg(z) = -\dfrac{5\pi}{6}\quad[2\pi]$.

On en déduit que $z = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

2. $z = 5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = 5\times\left(\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right) = 5\times\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = -\dfrac{5}{2}-\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

3.
- $zz' = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\times4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 12\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)} = 12\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)} = 12\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
- $z^3 = \left(3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right)^3 = 3^3\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = 27\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.
- $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}{4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}} = \dfrac{3}{4}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.
- $\dfrac{3z^2}{2\overline{z'}} = \dfrac{3\times\left(3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right)^4}{2\times4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}} = \dfrac{3\times3^4\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}}{8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}} = \dfrac{243\times1}{8}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \dfrac{243}{8}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.