Lycée Louise Michel (Gisors)
Terminale S

MATHEMATIQUES
Continuité et dérivabilité : entraînement (2)

Exercice 1

Dans cet exercice, f désigne la fonction définie et dérivable sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ dont on donne ci-dessous, le tableau de variations, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	35	$\nearrow$	$+\infty$

1. La courbe $\mathscr{C}$ admet-elle une asymptote verticale ?
Si oui, préciser son équation réduite et indiquer ce qui permet de l'affirmer.

2. Démontrer soigneusement que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α dans $\mathscr{D}_f$.

3. On admet que f est définie sur $\mathscr{D}_f$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 80}{x - 2}$.
Donner sans justifier, un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[4\ ;\ 9]$ par $f(x) = x + \sqrt{x} - 8$.
Monter que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[4\ ;\ 9]$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ 2]$ par :

$$f(x) = E(x) + [x - E(x)]^2$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x.
Démontrer que f est continue sur $[0\ ;\ 2]$.

Rappel : Si n désigne un entier relatif, pour tout réel x de $[n\ ;\ n+1[$, $E(x) = n$.

Exercice 4

On considère les fonctions f et g définies et dérivables pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;8]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{3} + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^3}{27} - \frac{4x^2}{9} - x + 18$$

1. Les courbes représentatives respectives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions f et g, dans un repère orthogonal, sont tracées ci-dessous. Lire avec la précision permise par le graphique une valeur approchée des coordonnées de leur point d'intersection E.

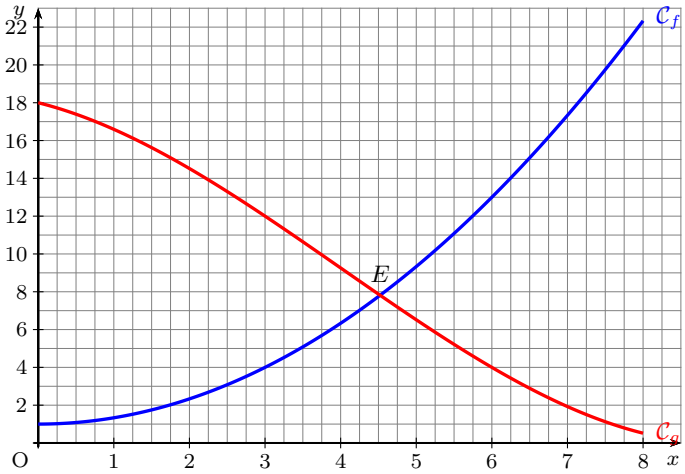
2. Afin de déterminer les coordonnées du point E de façon plus précise, on est amené à résoudre dans l'intervalle $]0\,;8]$ l'équation $g(x) = f(x)$.

Pour cela, on considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;8]$ par $h(x) = g(x) - f(x)$.

a. Déterminer le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $]0\,;8]$.

b. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $]0\,;8]$.

c. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'arrondi de x_0 au centième.



3. Les fonctions f et g définies dans la partie A modélisent respectivement l'offre et la demande d'un produit :

— $f(x)$ est la quantité, exprimée en milliers d'articles, que les producteurs sont prêts à vendre au prix unitaire de x centaines d'euros ;

— $g(x)$ la quantité, exprimée en milliers d'articles, que les consommateurs sont prêts à acheter au prix unitaire de x centaines d'euros.

On appelle prix unitaire d'équilibre du marché la valeur de x pour laquelle l'offre est égale à la demande.

a. Quel est, exprimé à l'euro près, le prix unitaire d'équilibre du marché ?

b. Quel nombre d'articles, (*arrondi à la centaine d'articles près*), correspond à ce prix unitaire d'équilibre ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....