MATHEMATIQUES

Fonctions trigonométriques : entraînement (corrigé)

Exercice 1

1. a. $(OH) \perp (ABC)$, donc (OH) est orthogonale à toute droite du plan (ABC), donc à (BC).

b. (OA) est orthogonale à deux droites sécantes (OB) et (OC) du plan (OBC), donc (OA) est orthogonale à tout le plan (OBC), donc en particulier à la droite (BC).

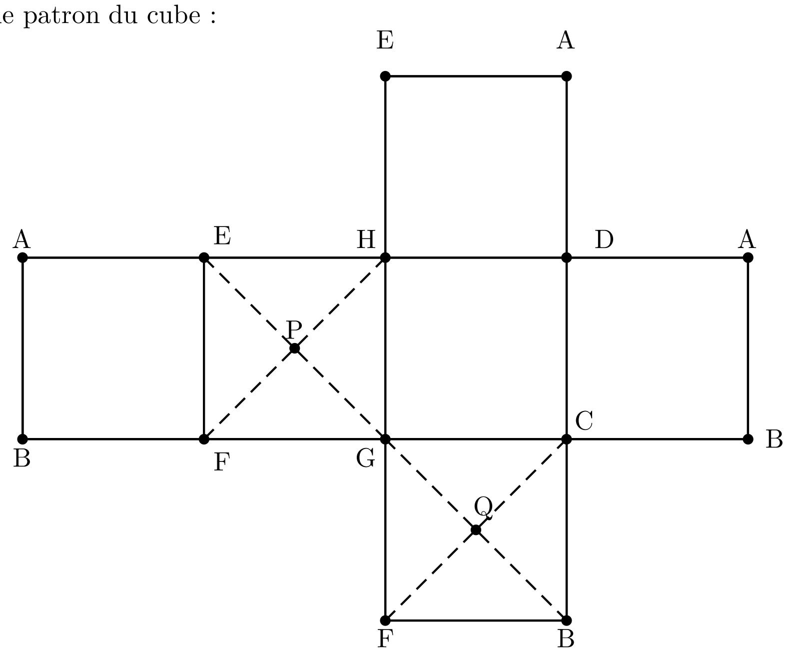
2. a. $(OH) \perp (BC)$ et $(OA) \perp (BC)$, donc (BC) est ortho- gonale à tout le plan (OAH) ((OA) et (OH) sont dans le plan (OAH)), donc, en particulier, à la droite (AH).

b. $(OH) \perp (AC)$ (même principe que **1. a.**) et $(OB) \perp (AC)$ (même principe que **1. b.**), donc (AC) est orthogonale à tout le plan (OBH), donc en particulier à la droite (BH).

3. On vient de prouver que (AH) et (BC) sont orthogonales et que (BH) et (AH) le sont aussi. Ainsi, le point H est à l'intersection de deux hauteurs dans le triangle ABC, H est donc l'orthocentre du triangle ABC.

Exercice 2

1. Un exemple de patron du cube :



2. EG est la diagonale d'un carré de côté 2 cm donc : $EG = 2\sqrt{2}$ cm.
$EP = \dfrac{1}{2}EG$ d'où : $EP = \sqrt{2}$ cm.

Ou avec Pythagore

La diagonale d'un carré de côté a vaut $a\sqrt{2}$. Pour obteni ce résultat, on peut utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle EGF rectangle en F.

3. Le triangle AEP est rectangle en E.

4. On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle AEP rectangle en E, on a :
$AP^2 = AE^2 + EP^2 = 2^2 + (\sqrt{2})^2 = 4 + 2 = 6$ donc : $AP = \sqrt{6}$ cm.

5. Dans le triangle équilatéral BEG, on a :
P milieu de $[EG]$, Q milieu de $[BG]$ donc, d'après le théorème des milieux : $PQ = \dfrac{1}{2}EB$.
De plus, EB est la diagonale d'un carré de côté 2 cm donc : $EB = 2\sqrt{2}$ et $PQ = \sqrt{2}$ cm.

Triangle BEG

Le triangle BEG est équilatéral car ses trois côtés ont la même longueur (diagonales de carrés de même dimension.

6. Le solide GEBF est une pyramide à 4 côtés à base triangulaire d'où : $GEBF$ est un tétraèdre.

$\mathcal{V} = \dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3} = \dfrac{\text{aire du triangle } EBF \times FG}{3}$.
Or, l'aire du triangle EBF vaut : $\dfrac{EF \times FB}{2} = \dfrac{2 \times 2}{2} = 2 \text{ cm}^2$.
D'où : $\mathcal{V} = \dfrac{2 \times 2}{3} \text{ cm}^3$. Soit $\boxed{\mathcal{V} = \dfrac{4}{3} \text{ cm}^3.}$

Exercice 3

1. Dans le plan (EFG), les droites (PM) et (FG) ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes ; on appelle L leur point d'intersection.

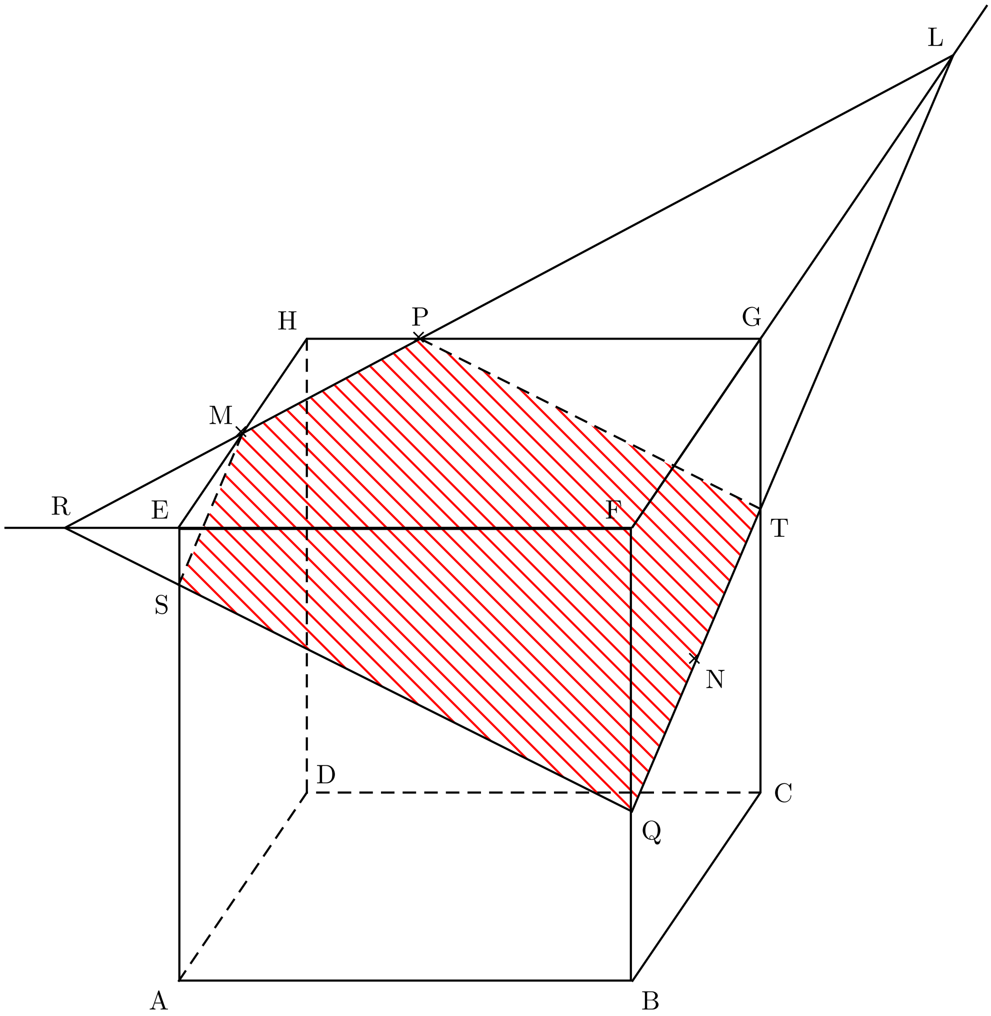
2. **a.** Les droites (LN), (BF) et (CG) sont coplanaires dans le plan (BCG) d'où les constructions de T et Q.

b. On cherche l'intersection des plans (MNP) et (ABF).

La section de (MNP) avec le plan (CDG) est la droite (PT).
Le plan (ABF) est parallèle au plan (CDG), donc la section du plan (MNP) se fait suivant la parallèle à (PT) passant par Q.

Droites parallèles

Si deux plans sont parallèles, alors tout plan sécant à l'un est aussi sécant à l'autre et leurs droites d'intersection sont parallèles.



3. Notons S le point d'intersection de (AE) et de la parallèle à (PT) passant par Q..
La section du cube par le plan (MNP) est le pentagone $MPTQS$.