Lycée Louise Michel (Gisors)
Terminale S

MATHEMATIQUES
Droites et plans de l'espace : entraînement savoir-faire (Corrigé)

Exercice 1

a. Les droites (BD) et (AC) sont coplanaires et sécantes au point I. Ainsi (BD) $\subset$ (ADB) et (AC) $\subset$ (ADB) ;

b. Les droites (AD) et (EH) sont coplanaires et parallèles ;

c. Les droites (AC) et (IC) sont coplanaires et confondues ;

d. Les droites (EH) et (GC) sont non coplanaires.

Exercice 2

a. La droite (AG) et le plan (EDH) sont sécants au point A.

b. La droite (AF) et le plan (GHD) sont strictement parallèles car les droites (AF) et (DG) sont parallèles.

c. La droite (BD) est contenue dans le plan (ABC) : (BD) $\subset$ (ABC).

Exercice 3

a. Les plans (EFD) et (GHC) sont sécants suivant la droite (DC) ;

b. Les plans (ABF) et (GDC) sont strictement parallèles ;

c. des plans (ABC) et (DCB) sont confondus.

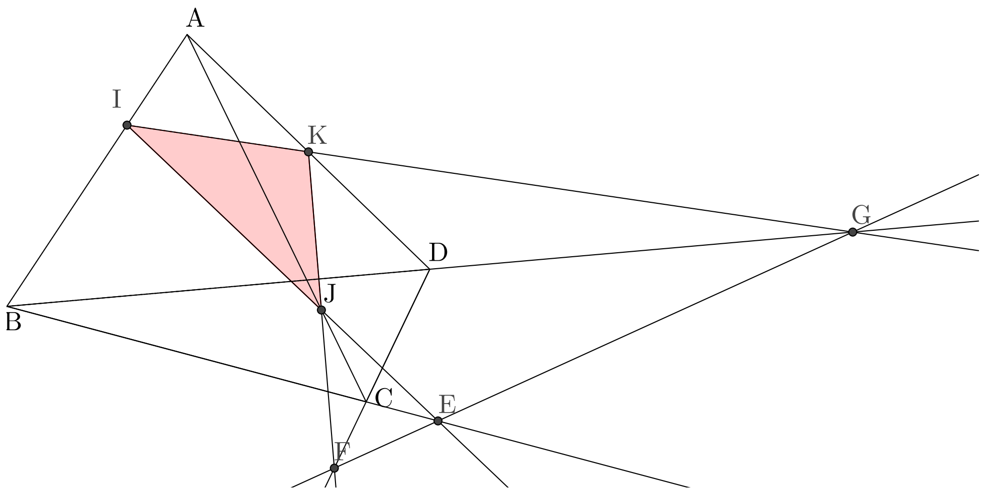
Exercice 4

a. Les droites (IJ) et (BC) sont coplanaires dans le plan (ABC).
Dans ce plan, les droites (IJ) et (BC) se coupent en E car $\dfrac{AI}{AB} \neq \dfrac{AJ}{AC}$.

b. Les droites (IJ) et (BD) ne sont pas coplanaires. En effet, s'il existait un plan $\mathscr{P}$ qui contienne les points I, J, B et D, alors le point A (point de (BI)) et le point C (point de la droite (AJ)) appartiendraient à $\mathscr{P}$. Alors les points A, B, C et D seraient coplanaires. Or ceci est absurde car ABCD est un tétraèdre.

c. La droite (IJ) n'est pas contenue dans le plan (BCD) et le point E est commun à (IJ) et (BCD).

d. Les plans (IJK) et (BCD) ne sont pas confondus et contiennent le point E. Donc, ils sont sécants selon une droite Δ passant par le point E.
Pour construire Δ, on construit le point d'intersection F des droites (JK) et (CD) dans le plan (ACD).
D'où $\Delta = (EF)$.



Exercice 5

La droite (AH) contenue dans le plan (ACH) est parallèle à la droite (BG) contenue dans le plan (EBG).

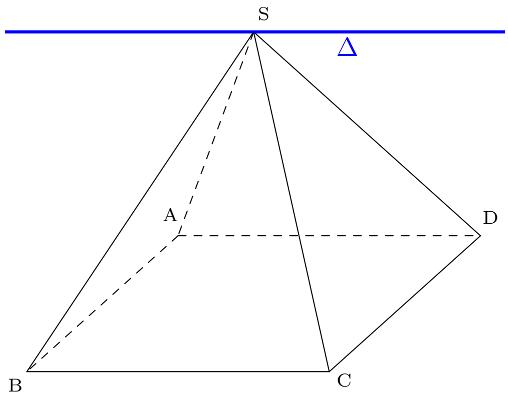
De plus la droite (AC) contenue dans le plan (ACH) est parallèle à la droite (EG) contenue dans le plan (EBG).

On en déduit que les plans(ACH) et (EGB) sont parallèles.

Le théorème

Deux plans sont parallèles si et seulement si deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre.

Exercice 6



Les plans (SBC) et (SAD) possèdent S comme point commun et ne se sont pas confondus car A $\in$ (SBC). Ils sont donc sécants suivant une droite Δ passant par le sommet S.

Les droites (BC) de (SBC) et (AD) de (SAD) sont parallèles.

D'après le théorème du toit, la droite Δ est donc aussi parallèle à (AD) et (BC).

Exercice 7

a. Les droites (AD) et (HD) sont perpendiculaires car ADHE est un carré.

b. Les droites (AD) et (CG) sont orthogonales d'après la question précédente car les droites (HD) et (CG) sont parallèles mais ne sont pas perpendiculaires car elles ne sont pas coplanaires. ($C \notin (ADG)$).

Exercice 8

a. La droite (GC) est perpendiculaire à (BC) car GCGF est un carré.
De même, la droite (GC) est perpendiculaire à (CD) car GCDH est un carré.
On en déduit que la droite (GC) est orthogonale au plan (ABC) contenant les droites (CD) et (CB) sécantes au point C.

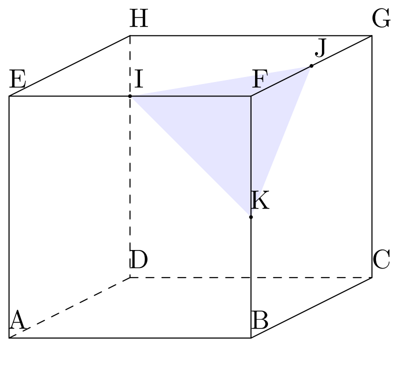
b. La droite (GC) est orthogonale au plan (ABC) donc à toute droite de ce plan, en particulier la droite (AC).
On en déduit que le triangle AGC est triangle en C.
Pour déterminer la longueur du segment [AC], on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B :

$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 \quad \text{d'où} \quad \mathrm{AC} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2} = \sqrt{2}$$

Pour déterminer la longueur du segment [AG], on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle AGC rectangle en C :

$$\mathrm{AG}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{GC}^2 \quad \text{d'où} \quad \mathrm{AG} = \sqrt{\mathrm{AC}^2 + \mathrm{GC}^2} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Exercice 9

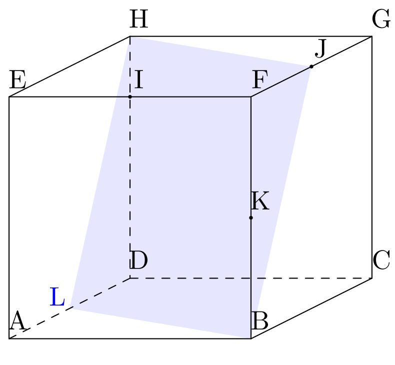


1. Section avec le plan (IJK).

a. Les points I et J appartiennent tous les deux aux plans (EHG) et (IJK).

Les plans (EHG) et (IJK) sont donc sécants suivant la droite (IJ).

b. De même, les plans (GCB) et (IJK) sont donc sécants suivant la droite (JK) et les plans (ABE) et (IJK) sont donc sécants suivant la droite (IK).



2. Section avec le plan (BJH).

a. Les points B et J appartiennent tous les deux aux plans (BCF) et (BJH). Les plans (BCF) et (BJH) sont donc sécants suivant la droite (BJ).

b. Les plans (BCF) et (ADE) sont strictement parallèles et donc les plans (ADE) et (BJH) sont sécants suivant une droite d parallèle à la droite (BJ). Or le point H appartient à ces deux plans, donc à la droite d.

c. On trace donc la droite parallèle (BJ) passant par le point H.

3. Section avec le plan (IDK).

a. Les points I et K appartiennent tous les deux aux plans (IDK) et (ABE). Les plans (IDK) et (ABE) sont donc sécants suivant la droite (IK).

b. Les droites (IK) et (AB) sont coplanaires et sécantes en un point P. Les plans (IDK) et (ABC) sont donc sécants suivant la droite (DP).

c. Les plans (IDK) et (EFG) sont donc sécants suivant la droite parallèle à (DP) passant par le point I, point commun à ces deux plans.