MATHEMATIQUES
Vecteurs et repère de l'espace : entraînement (corrigé)

Exercice 1

1. Le plan (P) est le plan (ABC) donc il contient le point A et est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Comme le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ $\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$, on en déduit qu'une représentation paramétrique du plan (ABC) est : $\begin{cases}x=0-2t-3t'\\y=1-t+0t'\\z=-1+0t+t'\end{cases}$ soit $\begin{cases}x=-2t-3t'\\y=1-t\\z=-1+t'\end{cases}$ avec t et t' deux réels..

Malheureusement, cette représentation paramétrique n'est pas dans les propositions.

Pensez-y !
Il y a infinité de représentations paramétriques d'un même plan. Tout dépend du choix du point et des vecteurs qui le dirigent.

La réponse **a.** n'est pas une représentation paramétrique de plan, mais d'une droite.

Pour la réponse **b.**, il est clair que le point A est bien dans ce plan (en prenant $t=t'=0$).

Il reste à regarder si les points B et C sont aussi dans ce plan.

- Pour le point B :

On cherche t et t' qui vérifient : $\begin{cases}-2=t+2t'\\0=1-t+t'\\-1=-1-t\end{cases}$.

Le système formé par les deux dernières équations donne $\begin{cases}t=0\\t'=-1\end{cases}$.

Ces valeurs de t et t' vérifient bien la première équation car $0+2\times(-1)=-2$. On en déduit que le point B est dans ce plan.

- Pour le point C :

On cherche t et t' qui vérifient : $\begin{cases}-3=t+2t'\\1=1-t+t'\\0=-1-t\end{cases}$.

Le système formé par les deux dernières équations donne $\begin{cases}t=1\\t'=-2\end{cases}$.

Ces valeurs de t et t' vérifient bien la première équation car $1+2\times(-2)=-3$. On en déduit que le point C est dans ce plan.

Donc, la réponse **b.** est correcte.

2. Dans cette question, il faut étudier la position relative de la droite (D) par rapport au plan (P). Pour cela on utilise un vecteur directeur de la droite (D) et deux vecteurs qui dirigent le plan (P). On étudie alors si ces vecteurs sont coplanaires ou pas.

Un vecteur directeur de la droite (D) est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

On remarque que $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Par conséquent, les vecteurs $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

Vecteurs coplanaires

Pour montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires, on montre qu'il existe deux réels a et b tels que $\vec{u} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$. Autrement dit, on cherche a et b tels $\begin{cases}1 = -2a - 3b\\-1 = -a\\-1 = b\end{cases}$. Ce système a une unique solution $\begin{cases}a = 1\\b = -1\end{cases}$.
Ainsi, on a bien $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Ainsi, on a deux possibilités : soit la droite (D) est strictement parallèle au plan (P), soit elle est incluse dans le plan (P).

Pour le savoir, on prend un point de la droite et on regarde si ce point est dans le plan (ABC).

Le point $P(-2\ ;\ 0\ ;\ -1)$ est un point de la droite (D).

Il est aussi un point du plan (P) si et seulement si le système $\begin{cases}-2 = -2t - 3t'\\0 = 1 - t\\-1 = -1 + t'\end{cases}$ admet une unique solution. Les deux dernières équations donnent $\begin{cases}t' = 0\\t = 1\end{cases}$ et ces valeurs vérifient bien la première équation : $-2 = -2 \times 1 - 3 \times 0$.

On en déduit que le point P est un point du plan (P). Par conséquent, la droite (D) est incluse dans le plan (P).
La bonne réponse est **b.** « La droite (D) est une droite du plan (P). »

3. Un vecteur directeur de la droite (D) est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de la droite (MN) est $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}x_N - x_M\\y_N - y_M\\z_N - z_M\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}1-(-1)\\-2-2\\9-3\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}$

Position relative de deux droites

Pour étudier la position relative de deux droites, on étudie la colinéarité de leurs vecteurs directeurs.
S'ils sont colinéaires, les droites sont soient strictement parallèles, soient confondues, s'ils ne le sont pas, les droites sont soit sécantes, soit non coplanaires.

Les vecteurs ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles), donc les droites sont soit sécantes, soit non coplanaires.

Méthode

On cherche un éventuel point d'intersection. S'il existe les droites sont donc sécantes (et donc coplanaires) soit il n'y en a pas et dans ce cas les droites sont non coplanaires.

La droite (MN) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = 2 - 4k \\ z = 3 + 6k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

La droite (D) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = -1 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

On cherche les coordonnées d'un éventuel point d'intersection entre (D) et (MN) en résolvant le système $\begin{cases} -2 + t = -1 + 2k \\ -t = 2 - 4k \\ -1 - t = 3 + 6k \end{cases}$.

On résout le système formés par les deux dernières équations :
$\begin{cases} -t = 2 - 4k \\ -1 - t = 3 + 6k \end{cases} \iff \begin{cases} t = -2 + 4k \\ -1 - (-2 + 4k) = 3 + 6k \end{cases} \iff \begin{cases} t = -2 + 4k \\ k = -0,2 \end{cases} \iff \begin{cases} t = -2,8 \\ k = -0,2 \end{cases}$.

Ces deux valeurs ne vérifient pas la première équation. En effet : $-2 - 2,8 \neq -1 + 2 \times (-0,2)$.

On en déduit que ces deux droites n'ont pas de point d'intersection, elles sont donc non coplanaires.

La bonne réponse est **b.** « La droite (Δ) et la droite d'intersection de (P) et (S). »

4. Une représentation paramétrique du plan (ABC) est : $\begin{cases} x = -2k - 3k' \\ y = 1 - k \\ z = -1 + k' \end{cases}$ avec k et k' deux réels.

Les vecteurs qui dirigent ce plan sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique du plan (S) est : $\begin{cases} x = -2 + t + 2t' \\ y = -t - 2t' \\ z = -1 - t + 3t' \end{cases}$ avec t et t' deux réels.

Les vecteurs qui dirigent ce plan sont $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On a $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ donc $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont coplanaires.

On cherche a et b réels tels que $\vec{v} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$.

$\begin{cases} 2 = -2a - 3b \\ -2 = -a \\ 3 = b \end{cases}$. Ce système n'a pas de solution car $a = 2$ et $b = 3$ ne vérifient pas la première équation.

On peut donc dire que les vecteurs $\vec{v}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas coplanaires.

Par conséquent, les plans (ABC) et (S) sont sécants suivant une droite.

On regarde si le point M appartient à cette intersection.

$M \in (ABC)$, si et seulement si le système $\begin{cases} -1 = -2k - 3k' \\ 2 = 1 - k \\ 3 = -1 + k' \end{cases}$.

Avec les deux dernières équations, on trouve $k = -1$ et $k' = 4$.
Ces deux valeurs ne vérifient pas la première équation. En effet : $-2 \times (-1) - 3 \times 4 \neq -1$.

La bonne réponse est **b.** « La droite (Δ) et la droite d'intersection de (P) et (S). »

Vérification

On vérifie que la droite Δ est contenue dans chacun des deux plans (qui ne sont pas confondus par ailleurs).

Soit E le point de Δ de paramètre $t = 0$: $E(0\,;\,-2\,;\,-3)$ et soit F le point de paramètre $t = -2$: $F(-2\,;\,0\,;\,-1)$.
On reconnaît le point de (S) de paramètre ($t = 0$, $t' = 0$) donc $F \in$ (S).
Montrons que $E \in$ (S).

Résolvons le système $\begin{cases} 0 &= -2 + t + 2t' \\ -2 &= -t - 2t' \\ -3 &= -1 - t + 3t' \end{cases}$

En additionnant les lignes (1) et (3) on obtient $5t' = 0$ donc $t' = 0$ et en remplaçant dans les trois équations on obtient bien une seule valeur de $t = 2$.
Cela prouve que $E \in$ (P) pour ($t = 2$, $t' = 0$).
Conclusion : les points E et F sont dans (S).

On montre de la même façon que les points E et F sont dans le plan (ABC) (Faites-le, n'hésitez pas !).

La droite (Δ) étant simultanément contenue dans les deux plans (non confondus) est la droite d'intersection.

Exercice 2

Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

1. Dans le plan (EFG), les droites (PM) et (FG) ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes.

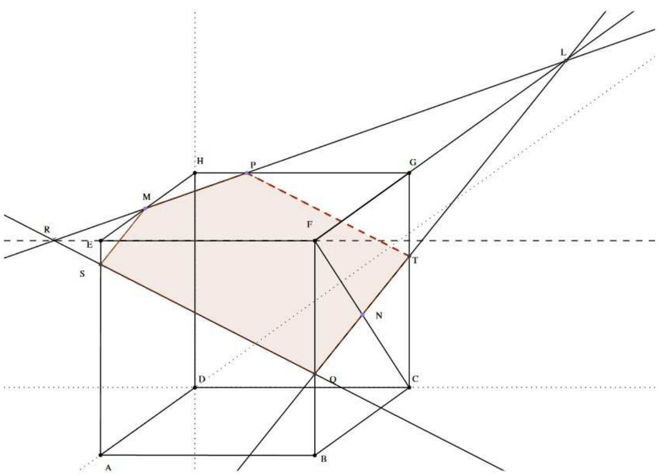
2. **a.** Les droites (LN), (BF) et (CG) sont coplanaires (dans le plan (BCG))... d'où les constructions de T et Q.

b. L'intersection des plans (MNP) et (ABF) est une droite.
Plusieurs manières de faire cette construction :

— On peut construire 2 points de la droite intersection :
Q est un point de l'intersection des plans (MNP) (car appartient à (LN), où L et N sont dans (MNP)) et (ABF) (car appartient à (BF)).
Dans le plan (EFG), les droites (MP) et (EF) ne sont pas parallèles, donc elles sont sécantes en un point R qui est aussi un point de l'intersection des plans (MNP) (car sur (MP)) et (ABF) (car sur (EF)).
L'intersection des plans (MNP) et (ABF) est donc la droite (RQ).

— On peut utiliser un point et la direction
On a déjà vu que Q est un point de la droite cherchée.
Les deux plans (ABF) et (CDG) sont parallèles, ils sont donc coupés par le plan (MNP) selon deux droites parallèles. Or, les points P et T sont à la fois dans (MNP) et (CDG), donc l'intersection de ces deux plans est (PT).
L'intersection des plans (MNP) et (ABF) est donc la droite parallèle à (PT) passant par Q.

3. Notons S le point d'intersection de (AE) et (QR).
La section du cube par le plan (MNP) est le polygone $MPTQS$.



Partie B

1. $M\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right)$,$N\left(1\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ et $P\left(\dfrac{1}{4}\ ;\ 1\ ;\ 1\right)$.

2. L est le point d'intersection de (MP) et (FG). On cherche donc une représentation paramétrique de chacune des deux droites (MP) et (FG).

(MP) passe par $M\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\left(\dfrac{1}{4}\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ 0\right)$, une représentation paramétrique de cette droite est donc : $\begin{cases} x = \dfrac{1}{4}t \\ y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}t \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$

(FG) passe par $F(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{v}(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$, une représentation paramétrique de cette droite est donc :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t' \quad \text{où } t' \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$$

$$L \in (MP) \cap (FG) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{4}t \\ y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}t \\ z = 1 \\ x = 1 \\ y = t' \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \dfrac{1}{4}t \\ y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}t \\ z = 1 \\ x = 1 \\ y = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = t \\ y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times 4 \\ z = 1 \\ x = 1 \\ y = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{5}{2} \\ z = 1 \\ t = 4 \\ t' = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Les coordonnées du point L sont $\left(1\ ;\ \dfrac{5}{2}\ ;\ 1\right)$.