MATHEMATIQUES
Vecteurs et repère de l'espace : entraînement savoir-faire (corrigé)

Exercice 1

1. a. $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$.

b. $\overrightarrow{MG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DI} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires.

Donc que les droites (AI) et (MG) sont parallèles.

Réflexe

Pour montrer que les droites (AI) et (MG) sont parallèles, on montre que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{MG}$ sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{MG} = k \times \overrightarrow{AI}$.

2. a. Démonstrations des égalités vectorielles.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DG} &= \vec{0} \\
\overbrace{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}}^{\overrightarrow{BG}} + \overbrace{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG}}^{\overrightarrow{CG}} + \overbrace{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AG}}^{\overrightarrow{DG}} &= \vec{0} \\
3\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \\
\overrightarrow{AG} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})
\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{JG} = \underbrace{\overrightarrow{JA}}_{=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}} + \overrightarrow{AG};$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{JG} &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \\
&= -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}
\end{aligned}$$

Comment faire ?

On cherche à exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
On utilise l'égalité $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DG} = \vec{0}$ en cassant chaque vecteur avec le point A.

b. Démonstration de l'égalité vectorielle.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{JE} &= \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AE} \\
&= -\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} \\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}
\end{aligned}$$

c. $\overrightarrow{JG} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\left(\underbrace{-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}_{\overrightarrow{JE}}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{JE}$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{JG}$ et $\overrightarrow{JE}$ sont colinéaires car il existe un réel k tel que $\overrightarrow{JG} = k\overrightarrow{JE}$.
Donc que les points J, G et E sont alignés.

Exercice 2

a. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$.

Or les vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{\text{EG}}$ sont coplanaires car les points E, F, G et H appartiennent au plan, celui contenant la face $EFGH$ du cube.
$\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc coplanaires.

Méthode
Trouver des vecteurs égaux avec des points qui sont dans le même plan.

b. $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ mais les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires car $D \notin (ABE)$.
$\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{DC}$ ne sont donc pas coplanaires.

Exercice 3

1. a. Expression des vecteurs $\overrightarrow{DJ}$, $\overrightarrow{DK}$ et $\overrightarrow{DF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DJ} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AJ} \\
&= \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\
&= \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}\right) \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}
\end{aligned}$$

De même $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} \\
&= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} \\
&= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} \\
&= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\
&= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \\
&= \overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}
\end{aligned}$$

b. Déduction de l'égalité.

$$\begin{aligned}
-\overrightarrow{DJ} + 3\overrightarrow{DK} &= -\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\right) \\
&= \overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DC} \\
&= \overrightarrow{DF}
\end{aligned}$$

2. Les vecteurs $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{DK}$ ne sont pas colinéaires car les points D, J et K ne sont pas alignés.
On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{DK}$ sont coplanaires car il existe deux réels $\alpha = -1$ et $\beta = 3$ tels que $\overrightarrow{DF} = \alpha\overrightarrow{DJ} + \beta\overrightarrow{DK}$ et les vecteurs $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{DK}$ ne sont pas colinéaires.
Par conséquent, les points D, J, K et F appartiennent au même plan.

Exercice 4

a. Dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, déterminer les coordonnées des points A, B, F, G.

$A(0\,;\,0\,;\,0)$ car l'origine du repère. $B(1\,;\,0\,;\,0)$ car $\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AE}$.

$F(1\,;\,0\,;\,1)$ car $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE}$.

$G(1\,;\,1\,;\,1)$ car $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE}$.

b. I a pour coordonnées $I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\,;\,\dfrac{y_A + y_B}{2}\,;\,\dfrac{z_A + z_B}{2}\right) = (0,5\,;\,0\,;\,0)$

K a pour coordonnées $(1\,;\,0,5\,;\,1)$ donc $\overrightarrow{IK}(0,5\,;\,0,5\,;\,1)$.

Exercice 5

On commence par calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-5 \\ 3-2 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7-5 \\ 4-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On remarque que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont égales au double de celles de $\overrightarrow{AB}$.
On en déduit que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ et donc que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Les points A, B et C sont donc alignés. En plus, B est le milieu du segment $[AC]$.

Exercice 6

a. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 4-2 \\ 2-1 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3-2 \\ 3-1 \\ 5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles car $2 \times \dfrac{1}{2} = 1$ mais $1 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \neq 2$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

Par conséquent, ils définissent bien un plan.

Rappel
Trois points non alignés définissent un plan.

b. Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0-3 \\ 3-3 \\ 7-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Méthode
Pour montrer que les droites (AB) et (CD) sont sécantes, on montre qu'elles ne sont pas parallèles puis qu'elles sont coplanaires.

Les coordonnées ne sont pas proportionnelles car $1 \times (-3) = -3$ mais $2 \times (-3) = -6 \neq 0$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires et, par conséquent, que les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

On cherche maintenant à montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires en trouvant deux réels α et β tels que :

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Méthode

Les droites n'étant pas parallèles, elles sont sont soit non coplanaires, soit sécantes (et donc bien sûr coplanaires).

Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0-2 \\ 3-1 \\ 7-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

On obtient ainsi le système $\begin{cases} -2 = 2\alpha + \beta \\ 2 = \alpha + 2\beta \\ 2 = -\alpha \end{cases}$

On trouve $\alpha = -2$ à l'aide de la troisième équation et $\beta = -2 - 2\alpha = -2 - 2 \times (-2) = 2$ à l'aide de la première.

De plus, la deuxième équation est bien vérifiée car $2 = -2 + 2 \times 2$.

Ainsi, on obtient la relation vectorielle $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$, ce qui prouve que les points A, B, C et D sont coplanaires et donc que les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

Exercice 7

a. La droite d admet donc comme représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 4 - 4t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

b. Deux méthodes sont possibles :

Méthode 1 :

On cherche la valeur de t telle que les coordonnées du point B vérifient la représentation paramétrique de d.

La $1^{\text{ère}}$ équation $x_B = -3 + 2t$ donne $t = \dfrac{x_B + 3}{2} = 3$.

On regarde maintenant si dans les autres équations, en remplaçant t par t si on obtient les deux autres coordonnées du point B.
On $2 - 3 = -1 = y_B$ et $4 - 4 \times 3 = -8 = z_B$.
Le point B appartient bien à la droite d.

Méthode 2 :

On établit la colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix}$.

On constate que $\overrightarrow{AB} = 3\vec{u}$ donc $B \in d$.

Exercice 8

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires d'après la page précédente et sont deux vecteurs directeurs du plan (ABC).

Une représentation paramétrique du plan (ABC) est $\begin{cases} x = 2 + 2t + t' \\ y = 1 + t + 2t' \\ z = 5 - t \end{cases}$.