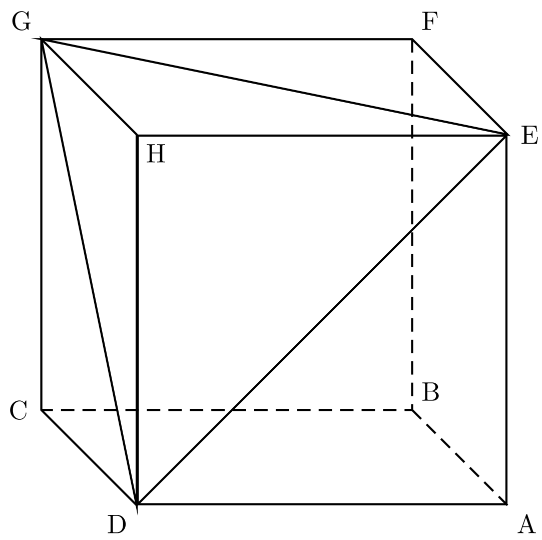
Lycée Louise Michel (Gisors)
Terminale S

MATHEMATIQUES
Produit scalaire dans l'espace : entraînement 1

Exercice 1

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1.



On se place dans le repère orthonormé $\left(B\ ;\ \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF}\right)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BH).

2. Démontrer que la droite (BH) est perpendiculaire au plan (DEG).

3. Déterminer une équation cartésienne du plan (DEG).

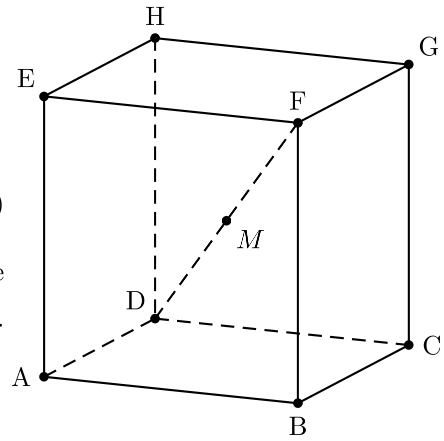
4. On note P le point d'intersection du plan (DEG) et de la droite (BH).
Déduire des questions précédentes les coordonnées du point P.

5. Que représente le point P pour le triangle DEG ? Justifier la réponse.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exercice 2

On considère un cube $ABCDEFGH$ dont la représentation graphique en perspective cavalière est donnée ci-contre.
Les arêtes sont de longueur 1.
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(D\ ;\ \overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{DH}\right)$.



Partie A

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (EBG).

2. Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).

3. En déduire les coordonnées du point I intersection de la droite (DF) et du plan (EBG).
On démontrerait de la même manière que le point J intersection de la droite (DF) et du plan (AHC) a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$.

Partie B

À tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, on associe le point M du segment $[DF]$ tel que $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DF}$.
On s'intéresse à l'évolution de la mesure θ en radian de l'angle $\widehat{EMB}$ lorsque le point M parcourt le segment $[DF]$. On a $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

1. Que vaut θ si le point M est confondu avec le point D ? avec le point F ?

2. a. Justifier que les coordonnées du point M sont $(x\ ;\ x\ ;\ x)$.

b. Montrer que $\cos(\theta) = \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2}$. On pourra pour cela s'intéresser au produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{MB}$.

3. On a construit ci-dessous le tableau de variations de la fonction

$$f\ :\ x \longmapsto \frac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2}.$$

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ ↘	0 ↘	$-\frac{1}{2}$ ↗	0

Pour quelles positions du point M sur le segment $[DF]$:

a. le triangle MEB est-il rectangle en M ?

b. l'angle θ est-il maximal ?