MATHEMATIQUES
Produit scalaire dans l'espace : entraînement 2 (corrigé)

Exercice 1

1. a. Comme A est l'origine du repère, les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont égales aux coordonnées de B, et donc la droite (AB), passant par A et dirigée par $\overrightarrow{AB}$ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 10k \\ y = -8k \\ z = 2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$.

La droite (CD) passant par C et dirigée par $\overrightarrow{CD}$ admet donc pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -1 + 15\ell \\ y = -8 + 12\ell \\ z = 5 + 3\ell \end{cases} \quad \ell \in \mathbb{R}$$

b. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont clairement non colinéaires (leurs abscisses ont le même signe, mais pas leurs ordonnées), donc les droites ne sont ni parallèles, ni confondues.
Voyons si elles ont un point commun, en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} 10k = -1 + 15\ell \\ -8k = -8 + 12\ell \\ 2k = 5 + 3\ell \end{cases} \iff \begin{cases} 5(5+3\ell) = -1 + 15\ell \\ -4(5+3l) = -8 + 12\ell \\ 2k = 5 + 3\ell \end{cases} \iff \begin{cases} 25 + 15\ell = -1 + 15\ell \\ -20 - 12\ell = -8 + 12\ell \\ 2k = 5 + 3\ell \end{cases} \iff \begin{cases} 26 = 0 \\ -20 - 12\ell = -8 + 12\ell \\ 2k = 5 + 3\ell \end{cases}$$

Position relative

On étudie la colinéarité des vecteurs directeurs des deux droites. S'ils sont colinéaires, les droites sont soit strictement parallèles, soit confondues. S'ils ne sont pas colinéaires, il y a deux possibilités : soit elles sont sécantes (et donc coplanaires) soit elles sont non coplanaires. Pour le savoir on cherche un éventuel point d'intersection entre ces deux droites.

Ce système n'a pas de solution, et donc il n'y a aucun point commun aux deux droites, donc elles ne sont pas sécantes.
Finalement, puisque ces droites ne sont ni confondues, ni parallèles, ni sécantes, par élimination on en déduit qu'elles sont effectivement non coplanaires.

2. a. Si I est sur (AB), alors il existe un paramètre k lui correspondant.

Puisque son abscisse est 5, cela donne $10k = 5$, soit $k = 0,5$. I est donc le point de paramètre $k = 0,5$ sur (AB), donc ses coordonnées sont : $\begin{cases} x_I = 5 \\ y_I = -8 \times 0,5 \\ z_I = 2 \times 0,5 \end{cases}$ soit $I(5\ ;\ -4\ ;\ 1)$.

De façon analogue J est le point de paramètre $\ell = \dfrac{1}{3}$ sur (CD), ce qui donne les coordonnées suivantes :

$$\begin{cases} x_J = -1 + 15 \times \dfrac{1}{3} \\ y_J = -8 + 12 \times \dfrac{1}{3} \\ z_J = 5 + 3 \times \dfrac{1}{3} \end{cases} \quad \text{soit } J(4\ ;\ -4\ ;\ 6).$$

Le repère de l'espace étant orthonormé, on a alors :
$IJ = \sqrt{(4-5)^2 + (-4-(-4))^2 + (6-1)^2}$ soit $IJ = \sqrt{26}$.

b. Le repère étant orthonormé, on peut utiliser les coordonnées des vecteurs pour calculer un produit scalaire.
$\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $(-1\ ;\ 0\ ;\ 5)$ et donc on a :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = 10 \times (-1) + (-8) \times 0 + 2 \times 5 = -10 + 0 + 10 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux, et donc les droites qu'ils dirigent, (AB) et (IJ) sont orthogonales.

Par définition de I, ces droites ont également I comme point commun, donc elles sont bien perpendiculaires.

De façon analogue : $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{IJ} = 15 \times (-1) + 12 \times 0 + 3 \times 5 = -15 + 0 + 15 = 0$.
(CD) et (IJ) sont donc également orthogonales, avec J comme point commun, par définition de J, et donc elles sont bien perpendiculaires.

3. a. La droite Δ est parallèle à (CD) et passe par le point I, elle est donc incluse dans le plan (IJM'). Ce plan étant bien défini car M' n'appartient pas à (IJ).
Dans ce plan, la droite Δ est perpendiculaire à (IJ) et donc aussi à la parallèle à (IJ) passant par M'.

Ainsi, la parallèle à (IJ) passant par le point M' coupe la droite Δ en un point qui sera noté P.

b. • Les droites (IJ) et $(M'P)$ sont parallèles donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{M'P}$ sont colinéaires.
• $\overrightarrow{IJ}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, donc $\overrightarrow{M'P}$ est aussi orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
• La droite Δ (dirigée par (IP)) est parallèle à (CD), donc le vecteur $\overrightarrow{M'P}$ orthogonal à $\overrightarrow{CD}$ l'est aussi à $\overrightarrow{IP}$.
On a donc

$$\begin{cases} \overrightarrow{M'P} \perp \overrightarrow{IP} \\ \overrightarrow{M'P} \perp \overrightarrow{AB} \end{cases}$$

$\overrightarrow{M'P}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IMP), il l'est à tout vecteur de ce plan et en particulier à $\overrightarrow{M'P}$.
• Le triangle MPM' est donc rectangle en P.

c. Dans le triangle rectangle $MM'P$, $[M'M]$ est l'hypoténuse, donc $MM' > M'P$. Or $M'P = IJ$ par construction, ainsi $MM' > IJ$.

On vient donc de prouver que la distance IJ est bien la distance minimale entre les droites (AB) et (CD).

Exercice 2

1. a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

il n'existe pas de réel k non nul tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs ne sont pas colinéaires ce qui entraîne que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0+0+4=4$.

c. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)=4$.

On a alors $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{4}{AB\times AC}=\dfrac{4}{\sqrt{20}\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{40}}{10}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

On en déduit $\widehat{BAC}\approx 51°$.

2. a. $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB}=4+0-4=0$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0+1-1=0$

$\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), on en déduit que $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (ABC)

b. $(ABC) : 2x-y-z+d=0$ car $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est normal à (ABC).

De plus $A(-1\ ;\ 2\ ;\ 0)\in(ABC)$, on en déduit $d=4$.

Finalement $(ABC) : 2x-y-z+4=0$.

3. a. $\mathcal{P}_2$ est de vecteur normal $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ donc $\mathcal{P}_2 : x-2z+d=0$.

or $O\in\mathcal{P}_2$, on en déduit que $d=0$.

Finalement on a bien $\mathcal{P}_2 : x=2z$.

b. $\mathcal{P}_1$ est de vecteur normal $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\mathcal{P}_2$ est de vecteur normal $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont évidemment pas colinéaires (il suffit de regarder l'ordonnée), les plans ne sont donc pas parallèles, ils sont nécessairement sécants.

Méthode

On commence par montrer que la droite est parallèle aux deux plans et qu'un point (n'importe lequel) de cette droite se trouve dans les deux plans. Du coup on montre que cette droite est la droite d'intersection des deux plans.

c. $\mathcal{D}$ est de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n_1}=0$ et $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$. On en déduit que $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}_1$ et à $\mathcal{P}_2$

Aisément

En fait on remplace x, y et z par les coordonnées du point M dans chacun des deux plans. Ces coordonnées doivent vérifier chacune des deux équations. Essayez !

De plus $M(0\ ;\ -3\ ;\ 0)$ appartient à $\mathcal{D}$, on montre aisément que ce point appartient aux deux plans à la fois

Finalement la droite $\mathcal{D}$ est parallèle aux deux plans et passe par un point commun aux deux plans, on en déduit que $\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2=\mathcal{D}$

Autre méthode

On cherche à résoudre le système $\begin{cases} 3x+y-2z+3=0 \\ x \quad\; -2z \quad\;\; =0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x+y-2z+3=0 \\ x-2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=2z \\ y=-4z-3 \end{cases}$

en posant $z=t$ on obtient la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ donc on a bien $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \mathcal{D}$

4. $I(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \mathcal{D}$ si et seulement si il existe un unique réel t tel que $\begin{cases} x=2t \\ y=-4t-3 \\ z=t \end{cases}$.

$I(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (ABC)$ si et seulement si $2x-y-z+4=0$.

$I \in \mathcal{D} \cap (ABC) \iff \begin{cases} x=2t \\ y=-4t-3 \\ z=t \\ 2x-y-z+4=0 \end{cases}$.

On cherche donc t tel que $2\times(2t)-(-4t-3)-t+4=0 \iff t=-1$

Finalement $\mathcal{D}$ coupe (ABC) en $I(-2\ ;\ 1\ ;\ -1)$.

Exercice 3

1. $2x_A - z_A - 3 = 2 - a^2 - 3 = -1 - a^2 < 0$ donc $2x_A - z_A - 3 \neq 0$.

Ce qui signifie que A n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$

2. a. $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$ donc directeur de $\mathcal{D}$ puisque $\mathcal{D}$ est orthogonale à $\mathcal{P}$ et $A(1\ ;\ a\ ;\ a^2) \in \mathcal{D}$ alors :

$\mathcal{D}\ :\ \begin{cases} x=1+2t \\ y=a \\ z=a^2-t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$

Conseil

Vous pouvez faire un petit graphique pour bien visualiser qu'un vecteur normal de $\mathcal{P}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

b. On se situe dans un repère orthonormé donc :

$AM^2 = (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 + (z_M - z_A)^2 = (1+2t-1)^2 + (a-a)^2 + \left(a^2 - t - a^2\right)^2 = 5t^2$.

On en déduit $AM = t\sqrt{5}$.

3. H est un point de $\mathcal{D}$ donc $AH = t\sqrt{5}$ avec t le paramètre associé à H dans la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$

H est un point de $\mathcal{P}$ donc ses coordonnées vérifient $2x_H - z_H - 3 = 0$ et donc le paramètre t associé à H vérifie : $2(1+2t) - \left(a^2 - t\right) - 3 = 0 \iff t = \dfrac{a^2+1}{5}$.

la distance AH est minimale lorsque t est minimum c'est à dire quand $a^2 = 0$ donc $a = 0$.

Finalement $A(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$ est le point de $\mathcal{D}$ de coordonnées $(1\ ;\ a\ ;\ a^2)$ pour lequel la distance AH est minimale.