MATHEMATIQUES

Produit scalaire dans l'espace : entraînement savoir-faire 1 (corrigé)

Exercice 1

1. Dans le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, on a :

A$(0\,;0\,;0)$, B$(1\,;0\,;0)$, C$(1\,;1\,;0)$, D$(0\,;1\,;0)$, E$(0\,;0\,;1)$ et G$(1\,;1\,;1)$.

On détermine alors les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{CE}$:

$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$. Ainsi, $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CE} = 1\times(-1)+1\times(-1)+1\times 1 = -1$.

On détermine de même les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{BD}$:

$\overrightarrow{GA}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$. Ainsi, $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{BD} = -1\times(-1)+(-1)\times 1+(-1)\times 0 = 0$.

2. a. Le point E est le projeté orthogonal du point H sur la droite (BE) car les droites (BE) et (HE) sont perpendiculaires.

Ainsi, $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BE} = BE^2 = 2$.

> **A savoir en TS**
> $[BE]$ est la diagonale d'un carré de côté 1, donc $BE=\sqrt{2}$. D'une manière générale, la diagonale d'un carré de côté a est $a\sqrt{2}$. Autrement on retrouve ce résultat avec le théorème de Pythagore.

b. On a $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BH} = BE\times BH\times\cos\left(\widehat{EBH}\right)$.

BH se calcule dans le triangle FHB rectangle en F avec le théorème de Pythagore :

$BH^2 = FH^2+FB^2$ soit $BH^2 = (\sqrt{2})^2+1^2$.
On en déduit que $BH=\sqrt{3}$.

Ainsi,
$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BH} = \sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\cos\left(\widehat{EBH}\right)$, or $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BH} = 2$ donc :

$$\cos\left(\widehat{EBH}\right) = \frac{2}{\sqrt{6}} \quad \text{d'où} \quad \widehat{EBH}\simeq 35^\circ$$

Exercice 2

On montre que le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ est nul :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.

Or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1\times 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

> **Tétraèdre régulier**
> Les triangles qui le composent sont des triangles équilatéraux de côté 1. Les angles dans de tels triangles valent tous $\frac{\pi}{3}$.

et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = AB\times AD\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont donc orthogonaux.

Exercice 3

Le cours

Un vecteur $\vec{n}$ est normal à un plan $\mathscr{P}$ lorsqu'il est non nul et orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $\mathscr{P}$.

Les faces $ABFE$ et $BCGF$ étant des carrés, le vecteur $\overrightarrow{FB}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC). Ainsi, $\overrightarrow{FB}$ est un vecteur normal au plan (ABC). On peut aussi dire que la droite (FB) est orthogonale au plan (ABC).

Exercice 4

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles) donc on peut définir le plan $(\mathscr{P})$ engendré par A, $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

De plus, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$.

On a $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = -3\times 1 + (-1)\times(-1) + 1\times 2 = 0$.

et $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v} = -3\times 0 + (-1)\times(-1) + 1\times(-1) = 0$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal au plan $(\mathscr{P})$.

Exercice 5

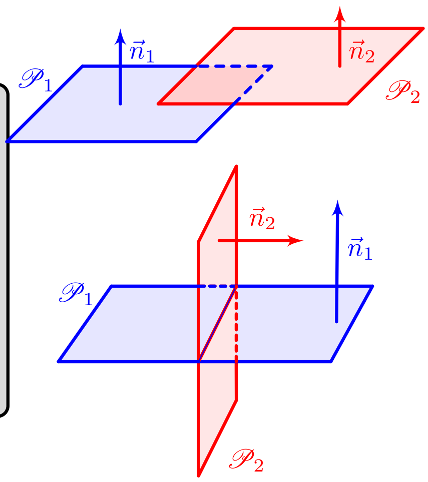
Cours et méthode

Soit $\mathscr{P}_1$ un plan de vecteur normal $\vec{n}_1$ et $\mathscr{P}_2$ un plan de vecteur normal $\vec{n}_2$:

- Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires.

- Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont orthogonaux.

Ici, pour montrer que les plans sont perpendiculaires, on montre que les vecteurs normaux sont orthogonaux.



Le vecteur $\vec{n_1}\begin{pmatrix}-2\\1\\6\end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan $\mathscr{P}_1$ et $\vec{n_2}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}_2$.

Or, $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = -2\times 2 + 1\times(-2) + 6\times 1 = 0$ donc les vecteur $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont orthogonaux et donc les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires.

Exercice 6

Deux méthodes sont possibles :

1ère méthode :

Méthode

Dans le cas où le plan (P) est défini par un point A et un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

- Ecrire l'équation cartésienne de (P) sous la forme $ax + by + cz + d = 0$ où le réel d est à déterminer.
- Déterminer d en utilisant les coordonnées du point A.

Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

- On commence par déterminer les réels a, b et c à l'aide du vecteur normal $\vec{n}$:
  On obtient ainsi $2x - y + z + d = 0$.

- On retrouve alors le réel d en exprimant l'appartenance du point A au plan $\mathscr{P}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{A} \in \mathscr{P} &\iff 2x_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{A}} + d = 0 \\ &\iff 2 \times (-1) - 3 + 2 + d = 0 \\ &\iff d = 3 \end{aligned}$$

  On obtient ainsi une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$: $2x - y + z + 3 = 0$.

2nde méthode :

Soit $\mathrm{M}(x\,;\,y\,;z)$ un point du $\mathscr{P}$. Ainsi $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-3 \\ z-2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{P} &\iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\iff (x+1) \times 2 + (y-3) \times (-1) + (z-2) \times 1 = 0 \\ &\iff 2x - y + z + 3 = 0 \end{aligned}$$

A savoir

Le plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

On obtient ainsi directement une équation cartésienne de d.