MATHEMATIQUES
Produit scalaire dans l'espace : entraînement savoir-faire 2 (corrigé)

Exercice 1

Méthode : intersection d'une droite et d'un plan

Pour déterminer l'intersection d'une droite d et d'un plan $\mathscr{P}$:

- on teste le parallélisme de d et de $\mathscr{P}$ en étudiant l'orthogonalité d'un vecteur directeur de d et d'un vecteur normal de $\mathscr{P}$.
- si d et $\mathscr{P}$ ne sont pas parallèles, alors ils se coupent en un point M dont les coordonnées se calculent en résolvant le système composé des équations de d et de $\mathscr{P}$.

Le plan $\mathscr{P}$ admet comme vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et la droite d admet comme vecteur normal $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$. Or, $\vec{n}\cdot\vec{u} = 2\times 3 + 1\times(-2) + (-1)\times 1 = 3 \neq 0$ donc la droite d et le plan $\mathscr{P}$ ne sont pas parallèles et sont donc sécants en un point $\mathrm{M}(x\,;y\,;z)$ vérifiant le système suivant :

$$\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -2-2t \\ z = -4+t \\ 2x+y-z-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -2-2t \\ z = -4+t \\ 2x+y-z-1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1+3t \\ y = -2-2t \\ z = -4+t \\ 2(1+3t)+(-2-2t)-(-4+t)-1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1+3t \\ y = -2-2t \\ z = -4+t \\ t=-1 \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} t=-1 \\ x = 1+3\times(-1) = -2 \\ y = -2-2\times(-1) = 0 \\ z = -4+(-1) = -5 \end{cases}$$

Le point d'intersection M de la droite d et du plan $\mathscr{P}$ a pour coordonnées $(-2\,;0\,;-5)$.

Exercice 2

Méthode : intersection de deux plans

Pour déterminer l'intersection de deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ de vecteurs normaux respectifs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$:

- on teste le parallélisme de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ en testant la colinéarité des vecteurs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$;
- si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles, alors ils sont sécants suivant une droite d dont on déterminera une représentation paramétrique en résolvant le système composé des équations de $\mathscr{P}_1$ et de $\mathscr{P}_2$.

Les plans $\mathscr{P}_1$ et de $\mathscr{P}_2$ ont pour vecteur normaux respectifs $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{n_2}\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$ qui ne sont pas colinéaires.

On en déduit que $\mathscr{P}_1$ et de $\mathscr{P}_2$ sont sécants suivant une droite.

Tout point M de la droite d admet comme coordonnées $(x\,;y\,;z)=(-1+t\,;-2+3t\,;6-7t)$ avec $t\in\mathbb{R}$.

Or, pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$(-1+t)+2(-2+3t)+(6-7t)-1=-1+t-4+6t+6-7t-1=0$

et

$2(-1+t)-3(-2+3t)-(6-7t)+2=-2+2t+6-9t-6+7t+2=0$

Explications

La première égalité montre que tout point M de (d) est aussi dans $\mathscr{P}_1$ et la deuxième égalité montre que tout point M de (d) est aussi dans $\mathscr{P}_2$.

On en déduit que tous les points de la droite d appartiennent aux plans $\mathscr{P}_1$ et de $\mathscr{P}_2$.

d est bien l'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

Exercice 3

Les plans $\mathscr{P}_1$ et de $\mathscr{P}_2$ ont pour vecteur normaux respectifs $\vec{n_1}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$ qui ne sont pas colinéaires.

On en déduit que $\mathscr{P}_1$ et de $\mathscr{P}_2$ sont sécants suivant une droite d. Soit M$(x\,;y\,;z)$ un point de d :

$$\begin{cases}2x+y+z+3=0\\x-3y+z-2=0\end{cases}\iff\begin{cases}2x+y+z+3=0\\x+4y+5=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=-4y-5\\z=-3-2x-y\end{cases}\iff\begin{cases}x=-4y-5\\z=9y+7\end{cases}$$

En choisissant $y=t$, on obtient une présentation paramétrique de d : $\begin{cases}x=-5-4t\\y=t\\z=7+9t\end{cases}$.

Exercice 4

a. Les points A, B et C définissent un plan si et seulement si ils ne sont pas alignés.

Or les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

En effet, il n'existe pas de réel k tel que $\begin{cases}-2\times k=-2\\2\times k=-2\\4\times k=-2\end{cases}$.

b. On détermine un vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ de d, donc orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC).

Explications

Un vecteur directeur de d est un vecteur normal du plan car d est orthogonale au plan.

Par exemple, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Ainsi, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.
On obtient le système suivant :

Explications

$\vec{n}$ est normal au plan si il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce même plan (les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, ici.

$$\begin{cases}-2a+2b+4c=0\\-2a-2b-2c=0\end{cases}\iff\begin{cases}a-b-2c=0\\a+b+c=0\end{cases}\iff\begin{cases}a=b+2c\\b=-\frac{3}{2}c\end{cases}$$

En choisissant $c=2$, on obtient $b=-\dfrac{3}{2}\times 2=-3$ puis $a=-3+2\times 2=1$.

La droite d passant par le point A admet donc comme représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -3t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Exercice 5

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M$(x\,;\,y\,;z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a\,;b\,;c) \neq (0\,;0\,;0)$.
En supposant que $a \neq 0$, le point $B(-\frac{d}{a}\,;\,0\,;0)$ appartient à l'ensemble $\mathscr{E}$ car$a\times(-\frac{d}{a})+b\times0+c\times0+d = -d+d = 0$.

On considère les vecteurs $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x+\frac{d}{a} \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{BM} \cdot \vec{n} = a(x + \frac{d}{a}) + by + cz = ax + by + cz + d$.

Donc $M \in \mathscr{E} \iff ax + by + cz + d = 0 \iff \overrightarrow{BM} \cdot \vec{n} = 0$
L'ensemble $\mathscr{E}$ est donc le plan de vecteur normal $\vec{n}$ passant par le point B.

Exercice 6

Soit Δ une droite dirigée par un vecteur $\vec{n}$, orthogonale à un plan $\mathscr{P}$ et d_1 et d_2 deux droites sécantes de $\mathscr{P}$ de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ non colinéaires.

- Si la droite Δ est orthogonale à toutes droites d'un plan $\mathscr{P}$, alors elle est, en particulier, orthogonale aux droites d_1 et d_2 de $\mathscr{P}$.
- On considère maintenant une droite Δ orthogonale à deux droites d_1 et d_2 de $\mathscr{P}$. On a donc $\vec{n} \cdot \vec{u_1} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{u_2} = 0$.
  Soit d' une droite de $\mathscr{P}$ de vecteur directeur $\vec{v}$. Montrons que Δ est orthogonale à d' en calculant $\vec{n} \cdot \vec{v}$:

  Le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{P}$ et donc il existe un couple de réels $(a\,;b)$ tel que $\vec{v} = a\vec{u_1} + b\vec{u_2}$.
  $\vec{n} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot (a\vec{u_1} + b\vec{u_2}) = a\vec{n} \cdot \vec{u_1} + b\vec{n} \cdot \vec{u_2} = a \times 0 + b \times 0 = 0$.

  Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{v}$ donc donc orthogonaux ainsi que les droites Δ et d'.

Remarque : Un vecteur normal à un plan $\mathscr{P}$ est donc orthogonal à tous vecteurs directeurs de $\mathscr{P}$.