Lycée Louise Michel (Gisors)
Terminale S

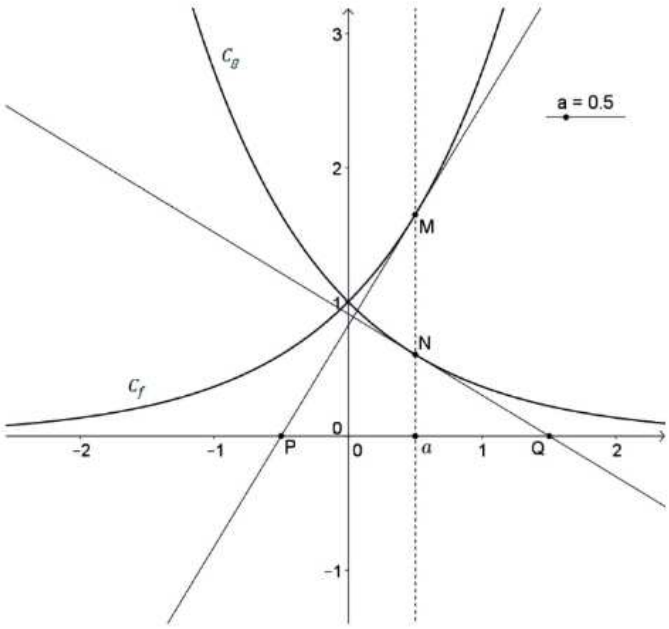
MATHEMATIQUES
Fonction exponentielle : entraînement 2

Exercice 1

Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \mathrm{e}^x \qquad \text{et} \qquad g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathcal{C}_g$ celle de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.
Pour tout réel a, on note M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a et N le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse a.
La tangente en M à $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en P, la tangente en N à $\mathcal{C}_g$ coupe l'axe des abscisses en Q.
À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a représenté la situation pour différentes valeurs de a et on a relevé dans un tableur la longueur du segment $[PQ]$ pour chacune de ces valeurs de a.



	A	B
1	Abscisse a	Longueur PQ
2	-3	2
3	$-2,5$	2
4	-2	2
5	$-1,5$	2
6	-1	2
7	$-0,5$	2
8	0	2
9	0,5	2
10	1	2
11	1,5	2
12	2	2
13	2,5	2
14		

Les questions **1.** et **2.** peuvent être traitées de manière indépendante.

1. Démontrer que la tangente en M à $\mathcal{C}_f$ est perpendiculaire à la tangente en N à $\mathcal{C}_g$.

2. a. Que peut-on conjecturer pour la longueur PQ ?

b. Démontrer cette conjecture.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 2

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x-1} + 1.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Partie A : étude de la fonction

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x-1}$.

4. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Partie B : recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a, qui passe par l'origine du repère.

1. On appelle T_a la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a. Donner une équation de T_a.

2. Démontrer qu'une tangente à $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si a vérifie l'égalité

$$1 - a^2\mathrm{e}^{a-1} = 0.$$

3. Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation

$$1 - x^2\mathrm{e}^{x-1} = 0.$$

4. Donner alors une équation de la tangente recherchée.