Lycée Louise Michel (Gisors)
Terminale S

MATHEMATIQUES
Fonction exponentielle : entraînement 3 (corrigé)

Exercice 1

Partie A : étude d'un cas particulier

1. Calcul de $C'(t)$.

On a pour tout $t \in [0\ ;\ +\infty[$: $C(t) = 12 - 12\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}$.

La fonction C est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme somme de fonctions dérivables) et :

$$\begin{aligned} C'(t) &= -12 \times \left(-\frac{7}{80}\right)\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t} \\ &= \frac{12 \times 7}{80}\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t} \\ &= \frac{21}{20}\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t} \end{aligned}$$

Autrement
Sans modifier l'écriture de $C(t)$ on a :
$C'(t) = 12\left(0 - \left(-\frac{7}{80}\right)\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}\right) = \frac{21}{20}\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}$.

$\frac{21}{20}\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t} > 0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$,
donc la fonction C est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. Le plateau est la limite de la fonction C en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{t\to+\infty} -\frac{7}{80}t = -\infty \\ \displaystyle\lim_{T\to-\infty} \mathrm{e}^{T} = 0 \end{array}\right\} \text{Par composition, } \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t} = 0 \text{ donc } \lim_{t\to+\infty} 12\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}\right) = 12.$$

Ainsi, $\lim_{t\to+\infty} C(t) = 12$.

Le plateau devrait être égal à 15 ; il n'est que de 12 donc le traitement n'est pas adapté.

Partie B : étude de fonctions

1. Calcul de la dérivée de la fonction f.

La fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \underbrace{105\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{u'(x)} \times \underbrace{\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right)}_{v(x)} + \underbrace{\frac{105}{x}}_{u(x)} \times \underbrace{\left(0 - \left(-\frac{3}{40}\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right)\right)}_{v'(x)} \\ &= \frac{-105}{x^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right) + \frac{105x}{x^2} \times \frac{3}{40}\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} \\ &= \frac{105}{x^2}\left(-1 + \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} + \frac{3x}{40}\mathrm{e}^{\frac{3}{40}}\right) \\ &= \frac{105\,g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

où g est la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \frac{3x}{40}\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} + \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} - 1$.

2. Sens de variation de f.

$f'(x) = \dfrac{105g(x)}{x^2}$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
D'après le tableau de variations de la fonction g, $g(x) < 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$, donc $f'(x) < 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ et donc la fonction f est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

3. Solution de l' équation $f(x) = 5,9$.

x	0	1	α	80	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$		$-$		
$f(x)$	$\|\|$	$\simeq 7{,}59$	$5{,}9$	$\simeq 1{,}31$	

Sur l'intervalle $[1\ ;\ 80]$:

- f est continue ;
- f strictement décroissante sur $[1\ ;\ 80]$;
- 5,9 est une valeur intermédiaire entre $f(1) = 105\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}}\right) \approx 7,59$ et $f(80) = \dfrac{105}{80}\left(1 - \mathrm{e}^{-6}\right) \approx 1,31$.

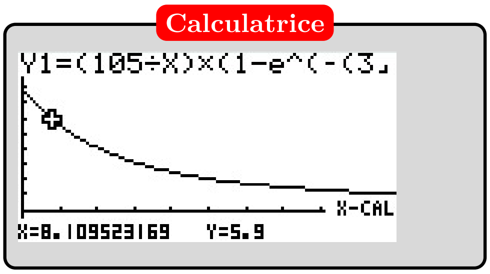
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel unique $\alpha \in [1\ ;\ 80]$, tel que $f(\alpha) = 5,9$.

La calculatrice donne $f(8) \approx 5,92 > 5,9$ et $f(9) \approx 5,73 < 5,9$,

donc $8 < \alpha < 9$;

$f(8,1) \approx 5,902 > 5,9$ et $f(8,2) \approx 5,882 < 5,9$, donc $8,1 < \alpha < 8,2$.

On a donc au dixième près $a \approx 8,1$.



Partie C : détermination d'un traitement adéquat

1. a. Puisque $C(t) = \dfrac{105}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{80}t}\right)$, on a :
$C(6) = \dfrac{105}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{80}\times 6}\right) = \dfrac{105}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}a}\right) = f(a)$, d'après la question précédente.

b. On a vu dans la dernière question de la partie précédente que l'équation $f(a) = 5,9$ admet une solution unique et que cette solution vaut environ $8,1$.
On prendra donc $8,1$ comme valeur approchée de la clairance a de ce patient.

2. On obtient pour ce patient $C(t) = \dfrac{d}{8,1}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{80}t}\right)$.

On a $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{d}{8,1}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{80}t}\right) = \dfrac{d}{8,1}$.

On souhaite que $\dfrac{d}{8,1} = 15 \iff d = 15 \times 8,1 = 121,5$.
Le débit sera donc de $121,5$ micromole par heure pour avoir un plateau égal à 15 et donc un traitement efficace.

Exercice 2

Partie A

1. a. Variations de la fonction g.

g est une fonction polynôme, elle est donc dériavable sur $\mathbb{R}$, et :

$$g'(x) = -6x^2 + 2x = 2x(-3x+1)$$

> **Evidemment**
>
> On peut aussi utiliser la règle des signes d'un polynôme du second degré (strictement négatif pour toutes les valeurs de x, sauf celles qui sont comprises entre les deux racines).

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$-3x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{26}{27}$	$\searrow$	

b. Limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} -2x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 - 1 = +\infty \end{array}\right\} \text{Par somme, } \lim\limits_{x \to +\infty} -2x^3 + x^2 - 1 = +\infty$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.

On a :

$$g(x) = -2x^3\left(1 + \frac{x^2}{-2x^3} - \frac{1}{-2x^3}\right) = -2x^3\left(1 + \frac{1}{-2x} + \frac{1}{2x^3}\right).$$

> **Toujours pareil**
>
> Pour les limites à l'infini des polynômes avec indétermination, mettez le terme de plus haut degré en facteur.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{-2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2x^3} = 0 \text{ donc } \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{-2x} + \frac{1}{2x^3}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} -2x^3 = -\infty \end{array}\right\} \text{Par produit, } \lim\limits_{x \to +\infty} -2x^3\left(1 + \frac{1}{-2x} + \frac{1}{2x^3}\right) = -\infty$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

2. $g(0) = -1 < 0$, $g\left(\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{26}{27} < 0$ et $g(-1) = 2 > 0$

On établit le tableau de variations de la fonction g :

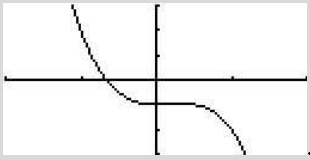
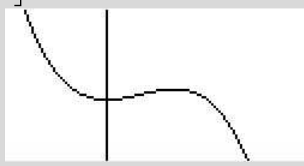
x	$-\infty$	-1	α	0	$\dfrac{1}{3}$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	2 ↘	0 ↘	-1 ↗	$-\dfrac{26}{27}$ ↘	$-\infty$

Sur $[-1\ ;\ 0]$:

- g est continue ;
- g est strictement décroissante ;
- 0 est une valeur intermédiaire entre $g(-1)2$ et $g(0) = -1$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [-1\ ;\ 0]$.

Calculatrice

Voici la représentation graphique de la fonction g : . Remarquez que sur ce graphique, ce n'est pas évident de voir que la fonction est croissante sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{1}{3}\right]$ et pourtant.... avec une autre fenêtre d'affichage (je vous laisse chercher laquelle), voilà ce qu'on obtient ..... .

3. Signe de g.

D'après le tableau de variations, $g(x) < 0$ sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$ et strictement positif sur $]-\infty\ ;\ \alpha[$ et s'annule en α.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie B

1. Calcul de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

On a $1 + x + x^2 + x^3 = x^3\left(\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} + 1\right)$.

FI

Par somme on arrive à une forme indéterminée.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1\right)=1\\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty\end{array}\right\}\text{ Par produit, }\lim_{x\to-\infty}x^3\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1\right)=-\infty$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

2. a. On multiplie l'inégalité $x>1$ par x (strictement positif) : $x^2>x$.
On multiplie cette dernière inégalité par x et on obtient $x^3>x^2$.

Pour $x>1$, on a donc : $1<x<x^2<x^3$.

b. Pour $x>1$, on a $1<x<x^2<x^3$ donc $0<\underbrace{1}_{<x^3}+\underbrace{x}_{<x^3}+\underbrace{x^2}_{<x^3}+\underbrace{x^3}_{<x^3}<4x^3$.

Comme pour tout x, $\mathrm{e}^{-2x+1}>0$, en multipliant par $\mathrm{e}^{-2x+1}>0$ dans chaque membre, l'inégalité $0<1+x+x^2+x^3<4x^3$ devient :

$$0<\left(1+x+x^2+x^3\right)\mathrm{e}^{-2x+1}<4x^3\mathrm{e}^{-2x+1}$$

ou autrement dit :

$$0<f(x)<4x^3\mathrm{e}^{-2x+1}$$

c. On a $\displaystyle\frac{\mathrm{e}}{2}(2x)^3\mathrm{e}^{-2x}=\frac{\overbrace{\mathrm{e}\times\mathrm{e}^{-2x}}^{\mathrm{e}^{2x+1}}\times 8x^3}{2}=4x^3\mathrm{e}^{-2x+1}$

Mon conseil
Pour démontrer cette égalité, je vous conseille de partir du membre de droite (pour arriver au membre de gauche.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty\\ \displaystyle\lim_{X\to+\infty}X^3\mathrm{e}^X=0\text{ résultat admis dans l'énoncé}\end{array}\right\}\text{ Par composition, }\lim_{x\to+\infty}(2x)^3\mathrm{e}^{2x}=0$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}}{2}(2x)^3\mathrm{e}^{-2x}=0$.

Compte tenu de l'égalité précédemment démontrée, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}4x^3\mathrm{e}^{-2x+1}=0$.

d. D'après la question précédente, si $x>1$, alors $0<f(x)<4x^3\mathrm{e}^{-2x+1}$.
Si x tend vers $+\infty$, on peut supposer que $x>1$ donc l'inégalité $0<f(x)<4x^3\mathrm{e}^{-2x+1}$ est vérifiée.
On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}4x^3\mathrm{e}^{-2x+1}=0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.
On en déduit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$.

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}f'(x)&=\underbrace{\left(1+2x+3x^2\right)}_{u'(x)}\underbrace{\mathrm{e}^{-2x+1}}_{v(x)})+\underbrace{\left(1+x+x^2+x^3\right)}_{u(x)}\underbrace{(-2)\mathrm{e}^{-2x+1}}_{v'(x)}\\&=\left(1+2x+3x^2-2-2x-2x^2-2x^3\right)\mathrm{e}^{-2x+1}\\&=\left(-2x^3+x^2-1\right)\mathrm{e}^{-2x+1}\\&=g(x)\mathrm{e}^{-2x+1}\end{aligned}$$

4. Pour tout x, $\mathrm{e}^{-2x+1}>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

Donc : sur $]-\infty\,,\,\alpha[$, $f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty\,,\,\alpha[$;

sur $]\alpha\,,\,+\infty[$, $f'(x)<0$ donc f est strictement décroissante sur $[\alpha\,,\,+\infty[$.