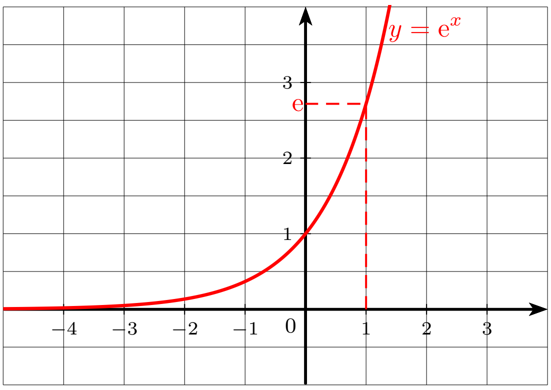
MATHEMATIQUES
Fonction exponentielle : entraînement savoir-faire (1) (corrigé)

Exercice 1



x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
e^x	0	1	e	$+\infty$

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$.

Exercice 2

A connaître

Pour tous réels x et y, et pour tout entier relatif m

$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$, $\quad \mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$, $\quad \mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$, $\quad (\mathrm{e}^x)^m = \mathrm{e}^{mx}$

$\mathrm{A} = (\mathrm{e}^x)^3 - \mathrm{e}^{2x} \times \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{3\times x} - \mathrm{e}^{2x+x} = \mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{3x} = 0.$

$\mathrm{B} = \mathrm{e}^{-x+3}\left(\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right) = \mathrm{e}^{-x+3} \times \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-x+3} \times \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{x+3} - \mathrm{e}^{-2x+3}.$

$\mathrm{C} = \dfrac{\left(\mathrm{e}^{x+2}\right)^2}{\mathrm{e}^{2x-1}} = \mathrm{e}^{2(x+2)-(2x-1)} = \mathrm{e}^{2x+4-2x+1} = \mathrm{e}^5.$

$$\begin{aligned}
\mathrm{D} &= \left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)^2 - \left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)^2 \\
&= \left(\underbrace{\mathrm{e}^{2x}}_{a^2} + \underbrace{2}_{2ab} + \underbrace{\mathrm{e}^{-2x}}_{b^2}\right) - \left(\underbrace{\mathrm{e}^{2x}}_{a^2} - \underbrace{2}_{2ab} + \underbrace{\mathrm{e}^{-2x}}_{b^2}\right) \\
&= 4
\end{aligned}$$

Egalités remarquables

On utilise les égalités remarquables :
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
avec $a = \mathrm{e}^x$ et $b = \mathrm{e}^{-x}$.
N'oubliez pas que $\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} = 2\mathrm{e}^{x-x} = 2\mathrm{e}^0 = 2$.

Exercice 3

1. Calcul des limites de $f(x)$.

• en $-\infty$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x - 4 = -4 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 2\mathrm{e}^x + 3 = 3 \end{array}\right\} \text{ Par quotient, } \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x - 4}{2\mathrm{e}^x + 3} = -\frac{4}{3}$$

• en $+\infty$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x - 4 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2\mathrm{e}^x + 3 = +\infty \end{cases}$ On obtient une F.I. du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

En factorisant par e^x au numérateur et au dénominateur, on trouve :

$$\frac{\mathrm{e}^x - 4}{2\mathrm{e}^x + 3} = \frac{\mathrm{e}^x\left(1 - \dfrac{4}{\mathrm{e}^x}\right)}{\mathrm{e}^x\left(2 + \dfrac{3}{\mathrm{e}^x}\right)} = \frac{1 - \dfrac{4}{\mathrm{e}^x}}{2 + \dfrac{3}{\mathrm{e}^x}}.$$

Même technique

C'est la même technique que pour les fonctions rationnelles. On factorise par le plus "fort".

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{4}{\mathrm{e}^x}\right) = 1 \text{ car } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{\mathrm{e}^x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 + \dfrac{3}{\mathrm{e}^x}\right) = 2 \text{ car } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{\mathrm{e}^x} = 0 \end{array}\right\} \text{Par quotient, } \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1 - \dfrac{4}{\mathrm{e}^x}}{2 + \dfrac{3}{\mathrm{e}^x}} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

2. Calcul des limites de $g(x)$.

• en $-\infty$:

Par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = -\infty$.

Explications

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x + 1 = -\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0 \end{array}\right\} \text{Par composition, } \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x^3 - x^2 + 2x + 1} = 0$$

• en $+\infty$:

$$2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 2x^3\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^3}\right)$$

F.I

Par somme c'est une forme indéterminée.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2x^3}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty \end{array}\right\} \text{Par produit, } \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^3}\right) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty \end{array}\right\} \text{Par composition, } \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2x^3 - x^2 + 2x + 1} = +\infty$$

3. Calcul des limites de $h(x)$.

• en $-\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0 \\[2ex] \lim\limits_{x\to-\infty} -2x+1 = +\infty\end{array}\right\} \text{ Par somme, } \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x - 2x + 1 = +\infty$$

Pensez-y !

On essaie toujours en premier avec les opérations. Parfois il n'y a pas indétermination ! La preuve !

• en $+\infty$:

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -2x+1 = -\infty\end{array}\right. \quad \text{On obtient une F.I. du type « } \infty - \infty \text{ ».}$$

En factorisant par e^x, on obtient :

$\mathrm{e}^x - 2x + 1 = \mathrm{e}^x \left(1 - 2 \times \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0 \text{ car } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty \\[2ex] \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = 0\end{array}\right\} \text{ Par somme, } \lim_{x\to+\infty} \left(1 - 2 \times \frac{x}{\mathrm{e}^x} + \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right) = 1$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \\[2ex] \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - 2 \times \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right) = 1\end{array}\right\} \text{ Par produit, } \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x \left(1 - 2 \times \frac{x}{\mathrm{e}^x} + \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right) = +\infty$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

Exercice 4

1.

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{e}^{-2x} & = & 1 \\ \mathrm{e}^{-2x} & = & \mathrm{e}^0 \\ -2x & = & 0 \\ x & = & \dfrac{0}{-2} \\ x & = & 0\end{array}$$

Méthode

On écrit l'équation sous la forme $\mathrm{e}^X = \mathrm{e}^Y$, puis on utilise l'équivalence $\mathrm{e}^X = \mathrm{e}^Y \iff X = Y$

L'équation a une unique solution : 0.

2.

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{e}^{x^2} & = & \mathrm{e}^{16} \\ x^2 & = & 16 \\ x & = & \sqrt{16} \text{ ou } x = -\sqrt{16} \\ x & = & 4 \text{ ou } x = -4\end{array}$$

Méthode

L'équation $X^2 = A$ a deux solutions lorsque A est strictement positif : $\sqrt{A}$ et $-\sqrt{A}$.

L'équation a deux solutions : -4 et 4.

3.

$$\begin{aligned} e^{x^2} &= e \\ e^{x^2} &= e^1 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \sqrt{1} \text{ ou } x = -\sqrt{1} \\ x &= 1 \text{ ou } x = -1 \end{aligned}$$

Rappel

$e = e^1$.

L'équation a deux solutions : -1 et 1.

4.

$$\begin{aligned} e^{x^2} &> e^2 \\ x^2 &> 2 \\ x^2 - 2 &> 0 \end{aligned}$$

Le trinôme $x^2 - 2$ est du signe de $a = 1$ partout sauf entre ses racines : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.
D'où le tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
signe de $x^2 - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

5. -1 est un nombre négatif. On en déduit que cette équation n'a pas de solution.

Conseil

Ne vous laissez pas surprendre par « le $-x$ ». Pour tout réel X, e^X est un nombre strictement positif.

6.

$$\begin{aligned} e^{-2x} &\geqslant 1 \\ e^{-2x} &\geqslant e^0 \\ -2x &\geqslant 0 \\ x &\leqslant \frac{0}{-2} \\ x &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Méthode

• On écrit l'inéquation sous la forme $e^x \geqslant e^y$, puis on utilise l'équivalence $e^x \geqslant e^y \iff x \geqslant y$.
• Attention, lorsque l'on divise par un nombre strictement négatif (ici -2), on change le sens de l'inégalité.

L'inéquation a pour solution : $]-\infty\ ;\ 0]$.

Exercice 5

1. Equation $e^{2x-3} = e^{-x+7}$.

$$\begin{aligned} e^{2x-3} &= e^{-x+7} \\ 2x - 3 &= -x + 7 \\ 3x &= 10 \\ x &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

On reconnaît

On reconnaît une équation du type $e^X = e^Y$ que l'on sait résoudre.

Donc $\mathscr{S} = \left\{\dfrac{10}{3}\right\}$.

2. Equation $e^{x^2} \times e^{-2x+1} - 1 = 0$.

$$\begin{aligned} e^{x^2} \times e^{-2x+1} - 1 &= 0 \\ e^{x^2-2x+1} &= 1 \\ e^{x^2-2x+1} &= e^0 \\ x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ (x-1)^2 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

On s'y ramène

On se ramène à une équation du type $e^X = e^Y$ que l'on sait résoudre.

Donc $\mathscr{S} = \{1\}$.

3. Equation $3e^{2x} + e^x - 4 = 0$
En posant $X = e^x$, $3e^{2x} + e^x - 4 = 0 \iff 3X^2 + X - 4 = 0$.

Autrement

Ici, c'est le changement de variables qui va permettre de résoudre l'équation.

$\Delta = 1^2 - 4 \times 3 \times (-4) = 49 > 0$ donc deux solutions $X_1 = \dfrac{-1-7}{2 \times 3} = -\dfrac{4}{3}$ et $X_2 = \dfrac{-1+7}{2 \times 3} = 1$.
On cherche la valeur de x telle que $e^x = X_1$ et celle de x telle que $e^x = X_2$:

- $e^x = -\dfrac{4}{3} < 0$: Cette équation n'admet pas de solution car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.
- $e^x = 1 \iff x = 0$.

Donc $\mathscr{S} = \{0\}$.

4. Inéquation $e^{-3x} > \dfrac{1}{e^{x+6}}$.

$$\begin{aligned} e^{-3x} &> \frac{1}{e^{x+6}} \\ e^{-3x} &> e^{-(x+6)} \\ -3x &> -x - 6 \\ -2x &> -6 \\ x &< 3 \end{aligned}$$

On s'y ramène

On se ramène à une inéquation du type $e^X > e^Y$ qu'on sait résoudre.

Donc $\mathscr{S} =]-\infty\ ;\ 3[$.

5. Inéquation $(e^x)^3 \leqslant \dfrac{e^{-2x+1}}{e^4}$.

$$\begin{aligned} (e^x)^3 &\leqslant \frac{e^{-2x+1}}{e^4} \\ e^{3x} &\leqslant e^{-2x+1-4} \\ 3x &\leqslant -2x - 3 \\ x &\leqslant -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

La même

On se ramène à une inéquation du type $e^X \leqslant e^Y$ qu'on sait résoudre.

Donc $\mathscr{S} = \left]-\infty\ ;\ \dfrac{3}{5}\right]$.

6. Inéquation $(\mathrm{e}^{x+1}+1)(\mathrm{e}^{x-2}-\mathrm{e}) \geqslant 0$.

A reconnaître
C'est un produit dans le membre de gauche et il y a 0 dans le membre de droite. On peut faire un tableau de signes pour résoudre cette inéquation.

- $\mathrm{e}^{x-2}-\mathrm{e} \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^{x-2} \geqslant \mathrm{e}^1 \iff x-2 \geqslant 1 \iff x \geqslant 3$.
- $\mathrm{e}^{x+1}+1>0$.

On en déduit le tableau de signe :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Signe de $\mathrm{e}^{x+1}+1$		$+$		$+$	
Signe de $\mathrm{e}^{x-2}-\mathrm{e}$		$-$		$+$	
Signe de $(\mathrm{e}^{x+1}+1)(\mathrm{e}^{x-2}-\mathrm{e})$		$-$	0	$+$	

Remarque
$(\mathrm{e}^{x+1}+1)(\mathrm{e}^{x-2}-\mathrm{e})$ est du signe de $\mathrm{e}^{x-2}-\mathrm{e} \geqslant 0$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x+1}+1>0$.

Exercice 6

1. La fonction $f \ : \ x \longmapsto -x\mathrm{e}^x$ est sous la forme d'un produit de deux fonctions $u \times v$.
$f(x) = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = -x$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.
Donc $f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$.

$$f'(x) = \underbrace{-1}_{u'(x)} \times \underbrace{\mathrm{e}^x}_{v(x)} + \underbrace{(-x)}_{u(x)} \times \underbrace{\mathrm{e}^x}_{v'(x)} = -\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(-x-1)$$

Conseil
Identifiez la forme de la fonction avant d'en calculer sa dérivée. Ici, c'est un produit.

2. La fonction $g \ : \ x \longmapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ est sous la forme d'un quotient de deux fonctions $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.

$$g'(x) = \frac{1 \times \mathrm{e}^x - x \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = \frac{\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = \frac{\mathrm{e}^x(1-x)}{(\mathrm{e}^x)^2} = \frac{1-x}{\mathrm{e}^x}$$

Rappels
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.
- $(\mathrm{e}^x)^2 = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x$.

3. La fonction $h \ : \ x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ est sous la forme d'un produit de deux fonctions $u \times v$.

$h(x) = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et $v(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.

Donc $h'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$, avec $u'(x) = (-1) \times \mathrm{e}^{-x}$ et $v'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

$$h'(x) = \underbrace{-\mathrm{e}^{-x}}_{u'(x)} \times \underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{v(x)} + \underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{u(x)} \times \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{v'(x)} = -\mathrm{e}^{-x}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

Exercice 7

- f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = \mathrm{e}^x - 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x + 1 \neq 0$ pour tout x réel.
  f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x \times (\mathrm{e}^x + 1) - (\mathrm{e}^x - 1) \times \mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x\right)^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x \times (\mathrm{e}^x + 1) - (\mathrm{e}^x - 1) \times \mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x\right)^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x \times [(\mathrm{e}^x + 1) - (\mathrm{e}^x - 1)]}{\left(\mathrm{e}^x\right)^2} = \frac{2}{\mathrm{e}^x} \end{aligned}$$

- La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle de la forme e^u avec u une fonction trinôme dérivable sur $\mathbb{R}$.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = (6x - 4)\mathrm{e}^{3x^2 - 4x + 1}$.

- La fonction h est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = x^2 - 2x + 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-3x+2}$.
  h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= (2x - 2)\mathrm{e}^{-3x+2} + (x^2 - 2x + 1) \times (-3)\mathrm{e}^{-3x+2} \\ &= \left[(2x - 2) + (x^2 - 2x + 1) \times (-3)\right] \mathrm{e}^{-3x+2} \\ &= (2x - 2 - 3x^2 + 6x - 3)\mathrm{e}^{-3x+2} \\ &= (-3x^2 + 8x - 5)\mathrm{e}^{-3x+2} \end{aligned}$$