Lycée Louise Michel (Gisors)
Terminale S

MATHEMATIQUES

Fonction exponentielle : entraînement savoir-faire (2) (corrigé)

Exercice 1

On suppose qu'il existe une autre fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$.
On considère la fonction $h = \dfrac{g}{\exp}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \neq 0$ donc la fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$h' = \frac{g' \times \exp - g \times \exp'}{\exp^2} = \frac{g \times \exp - g \times \exp}{\exp^2} = 0 \qquad \text{car } g' = g \text{ et } \exp' = \exp$$

La fonction h est donc constante sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(0) = \dfrac{g(0)}{\exp(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$ d'où $g(x) = \exp(x)$.

Exercice 2

- Soit $h : x \longmapsto \mathrm{e}^x - x$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.

  $h'(x) \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x \geqslant 1 \iff \mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^0 \iff x \geqslant 0$.
  On en déduit les variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $h'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de h : $x \longmapsto \mathrm{e}^x - x$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) \geqslant 1 > 0 \iff \mathrm{e}^x > x$.
  Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc, par comparaison : $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

- En posant $X = -x$, on obtient $\lim\limits_{x \to -\infty} X = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = \lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^{-X} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^X}$
  Or $\lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$ donc, par inverse, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^X} = 0$.