

---

**MATHEMATIQUES**  
**Fonctions trigonométriques : entraînement (corrigé)**

---

### Exercice 1

1. Résolution de l'équation.

$$\begin{aligned}\cos(x)^2 + \cos(x) &= 0 \\ \cos(x)(\cos(x) + 1) &= 0 \quad \text{On factorise pour se ramener à une équation produit nul.} \\ \cos(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos(x) &= -1\end{aligned}$$

- L'équation  $\cos(x) = 0$  a pour solutions  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$  et  $-\frac{\pi}{2} + 2k'\pi$  avec  $k$  et  $k'$  des entiers relatifs.  
On peut rassembler ces solutions en  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

- L'équation  $\cos(x) = -1$  a pour solutions  $\pi + 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

Les solutions sur  $\mathbb{R}$  sont donc :  $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; \pi + 2k\pi \right\}$

Sur  $[0 ; 2\pi[$ , les solutions sont :  $\frac{\pi}{2} ; \pi ; \frac{3\pi}{2}$ .

On en déduit graphiquement que la courbe  $\mathcal{C}_f$  coupe l'axe des abscisses en trois points sur l'intervalle  $[0 ; 2\pi[$ .

**Voilà**

C'est vraiment le genre d'équation qu'il faut savoir résoudre presque sans réfléchir (j'ai dit presque !). Faites un petit cercle trigonométrique dans votre tête pour visualiser les solutions.

**Remarque**

La courbe  $\mathcal{C}_f$  coupe l'axe des abscisses en trois points sur chaque intervalle d'amplitude  $2\pi$ .

2. a. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-x) = \cos^2(-x) + \cos(-x) = \cos^2(x) + \cos(x) = f(x)$ . La fonction est donc paire.

b. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi)^2 + \cos(x + 2\pi) = \cos(x)^2 + \cos(x) = f(x)$ . La fonction est donc  $2\pi$ -périodique.

c. Comme la fonction  $f$  est  $2\pi$ -périodique, on peut l'étudier sur un intervalle d'amplitude  $2\pi$  (on complétera par translation) : par exemple  $[-\pi ; \pi]$ .

De plus  $f$  est paire, on peut donc restreindre cet intervalle d'étude à  $[0 ; \pi]$  (on complétera par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées).

3. a. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme de deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  :

Pour tout réel  $x$  :

$$\begin{aligned}f'(x) &= -2 \sin(x) \cos(x) - \sin(x) \\ &= \sin(x) (-2 \cos(x) - 1) \quad \text{On factorise pour étudier le signe.}\end{aligned}$$

**Dérivée de  $u^2$**

La dérivée de  $u^2$  est  $2uu'$ .  
On peut aussi voir  $\cos^2(x)$  comme  $\cos(x) \times \cos(x)$  et dériver comme un produit de deux fonction. Essayez !

On commence par étudier le signe de sa fonction dérivée  $f'$  sur l'intervalle  $[0; \pi]$  :

Pour tout  $x \in [0; \pi]$ ,  $\sin(x) \geq 0$ .

$$-2 \cos(x) - 1 \geq 0 \iff -2 \cos(x) \geq 1$$

$$\iff 2 \cos(x) \leq -1$$

$$\iff \cos(x) \leq -\frac{1}{2}$$

$$\iff x \in \left[ \frac{2\pi}{3}; \pi \right]$$

**Conseil**

Trouvez les solutions de ces inéquations avec des cercles trigonométriques.

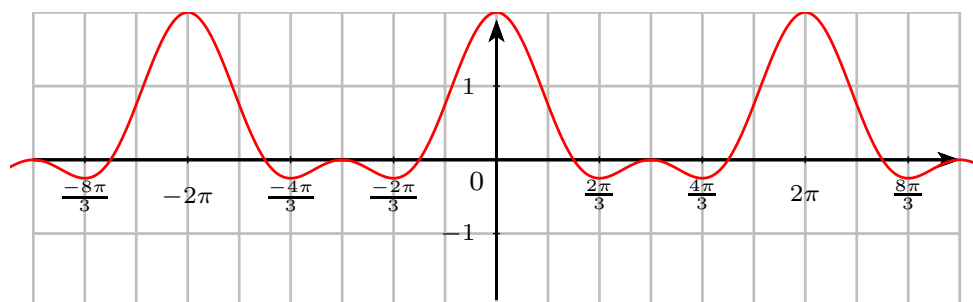
$$f(0) = 1^2 + 1 = 2;$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4};$$

$$f(\pi) = (-1)^2 + (-1) = 0.$$

$x$	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$
$\sin(x)$	0	+	0
$-2 \cos(x) - 1$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	2	$-\frac{1}{4}$	0

b.



## Exercice 2

1. a.  $f(x + 2\pi) = \sin^2(x + 2\pi) + \cos(x + 2\pi) = \sin^2 x + \cos x = f(x)$ .  
On en déduit que  $f$  est bien périodique de période  $2\pi$ .

b. Démontrer que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour la courbe revient à montrer que  $f$  est paire.

$$f(-x) = (\sin(-x))^2 + \cos(-x) = (-\sin(x))^2 + \cos(x) = \sin^2 x + \cos x = f(x).$$

$f$  est donc paire.

c. Comme la fonction  $f$  est  $2\pi$ -périodique, on peut l'étudier sur un intervalle d'amplitude  $2\pi$  (on complétera par translation) : par exemple  $[-\pi ; \pi]$ .

De plus  $f$  est paire, on peut donc restreindre cet intervalle d'étude à  $[0 ; \pi]$  (on complétera par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées).

2.  $f$  est la somme de deux fonctions dérivables sur  $[0 ; \pi]$ , donc  $f$  est dérivable sur  $[0 ; \pi]$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \sin(x) \cos(x) - \sin(x) \\ &= \sin(x) (2 \cos(x) - 1) \quad \text{On factorise.} \end{aligned}$$

### Dérivée de $u^2$

La dérivée de  $u^2$  est  $2uu'$ .  
On peut aussi voir  $\sin^2(x)$  comme  $\sin(x) \times \sin(x)$  et dériver comme un produit de deux fonction. Je me répète avec l'exercice précédent !

3. Sur  $[0 ; \pi]$ ,  $\sin x \geq 0$ .

$2 \cos x - 1 \geq 0$  est équivalente à  $\cos x \geq \frac{1}{2}$ .

Cette inéquation a pour solution  $\left[0 ; \frac{\pi}{3}\right]$ .

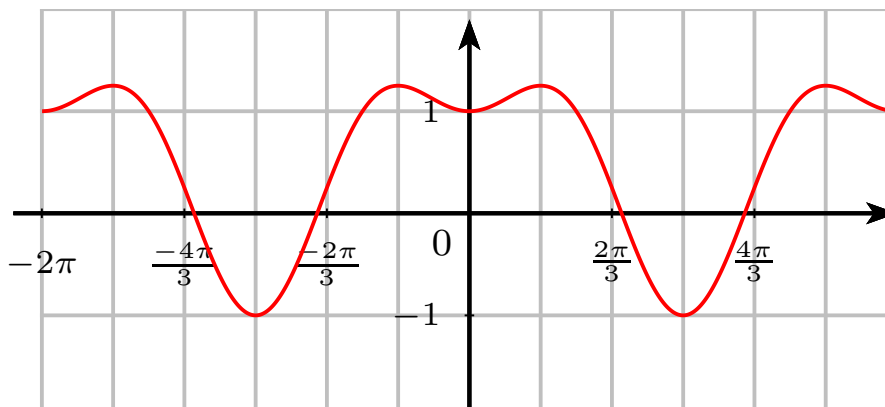
### Toujours le même conseil

Faites des cercles trigonométriques pour résoudre ces inéquations.

On en déduit le tableau de variations de  $f$  sur  $[0 ; \pi]$  :

$x$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\alpha$	$\pi$
$\sin(x)$	0	+	0	0
$2 \cos(x) - 1$		+	0	-
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	1	$\frac{5}{4}$	0	-1

4. Représentation graphique de  $f$  sur  $[-4\pi ; 4\pi]$ .



5. a. C'est une équation du second degré.

$$\Delta = 5. \text{ Les solutions sont } X_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } X_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

b.  $\alpha$  est solution de l'équation  $f(x) = 0$  si, et seulement si,  $\cos \alpha = 0$ .

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos \alpha &= 0 \\ 1 - \cos^2 \alpha + \cos \alpha &= 0 && \text{Car } \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ -\cos^2 \alpha + \cos \alpha + 1 &= 0 \\ \cos^2 \alpha - \cos \alpha - 1 &= 0 \\ X^2 - X - 1 &= 0 && \text{En posant } X = \cos \alpha \end{aligned}$$

Par conséquent,  $\alpha$  est solution de l'équation  $f(x) = 0$  si, et seulement si,  $\cos \alpha$  est solution de (E).

c.  $X_1 \notin [-1; 1]$ , donc  $\cos \alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ .

En utilisant la calculatrice, on obtient  $\alpha \simeq 2,237$ .

### Exercice 3

1.  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme quotient de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  dont le dénominateur ne s'annule pas puisque  $2 + \cos x \neq 0$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\overbrace{3 \cos x}^{u'(x)} \overbrace{(2 + \cos x)}^{v(x)} - \overbrace{3 \sin x}^{u(x)} \overbrace{(-\sin x)}^{v'(x)}}{\underbrace{(2 + \cos x)^2}_{(v(x))^2}} \\ &= \frac{6 \cos x + 3 \cos^2 x + 3 \sin^2 x}{(2 + \cos x)^2} \\ &= \frac{6 \cos x + 3(\cos^2 x + \sin^2 x)}{(2 + \cos x)^2} \\ &= \frac{6 \cos x + 3}{(2 + \cos x)^2} \end{aligned}$$

$f'(x)$  est du signe de  $6 \cos x + 3$  sur  $[0; \pi]$  soit du signe de  $\cos x + \frac{1}{2}$ . Or :

$$- \text{ sur } \left[0; \frac{2\pi}{3}\right], \cos x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x + \frac{1}{2} > 0;$$

$$- \text{ sur } \left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right], \cos x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x + \frac{1}{2} < 0.$$

Et  $f'(x)$  ne s'annule qu'en  $\frac{2\pi}{3}$ .

D'où le tableau de variation ci-contre.

$x$	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\sqrt{3}$	0

2.  $f(-x) = \frac{3 \sin(-x)}{2 + \cos(-x)} = \frac{-3 \sin x}{2 + \cos x} = -\frac{3 \sin x}{2 + \cos x} = -f(x)$  donc  $f$  est impaire.

On peut donc limiter l'étude de  $f$  à  $[0; \pi]$ . On peut en déduire que la fonction  $f$  est décroissante sur  $[-\pi; -\frac{2\pi}{3}]$  et sur  $[\frac{2\pi}{3}; \pi]$  et croissante sur  $[-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}]$ .

3.  $f(x + 2\pi) = \frac{3 \sin(x + 2\pi)}{2 + \cos(x + 2\pi)} = \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} = f(x)$  donc  $f$  est  $2\pi$ -périodique.

4. On trace  $\mathcal{C}$  sur  $[0 ; \pi]$  puis sur  $[-\pi ; 0]$  par symétrie centrale puisque  $f$  est impaire. Enfin, comme  $f$  est  $2\pi$ -périodique, on répète le motif tous les  $2\pi$  par translation.

