Lycée Louise Michel (Gisors)
Terminale S

MATHEMATIQUES
Fonctions trigonométriques : entraînement savoir-faire (corrigé)

Exercice 1

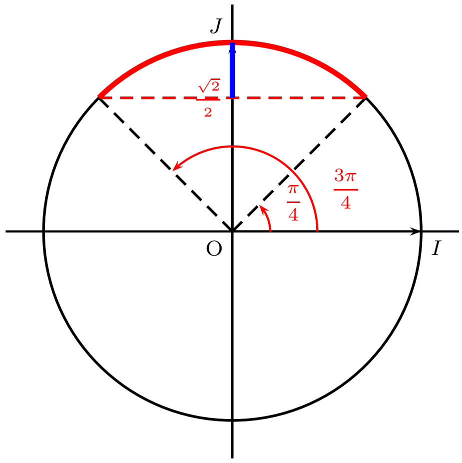
1. Résolution de l'inéquation $-2\sin x + \sqrt{2} < 0$.

Cette inéquation est équivalente à $-2\sin x < -\sqrt{2}$ soit $\sin x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$S = \left]\dfrac{\pi}{4}\,;\,\dfrac{3\pi}{4}\right[$.

Méthode

Commencez par écrire l'inéquation sous la forme $\sin x > a$. Puis, on place les points correspondants sur le cercle trigonométrique. Faites bien attention sur quel intervalle vous devez écrire les solutions !



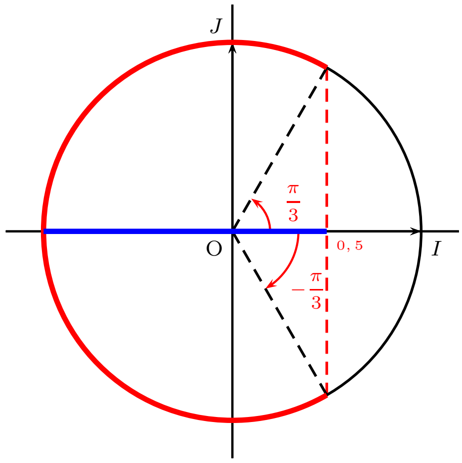
2. Résolution de l'inéquation $2\cos x - 1 \leqslant 0$.

Cette inéquation est équivalente à $2\cos x \leqslant 1$ soit $\cos x \leqslant \dfrac{1}{2}$.

$S = \left]-\pi\,;\,-\dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{3}\,;\,\pi\right]$.

Attention

Comme je l'avais dit juste au-dessus, il faut faire attention à l'intervalle dans lequel on veut les solutions.
Décrivez l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ et écrivez les solutions.



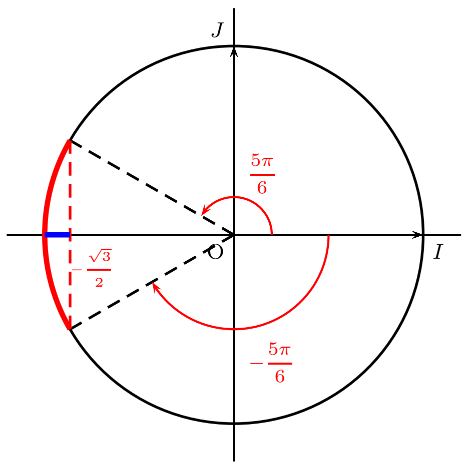
3. Résolution de l'inéquation $\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqslant 0$.

Cette inéquation est équivalente à $\cos x \leqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$S = \left[-\pi\,;\,-\dfrac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{6}\,;\,\pi\right[$.

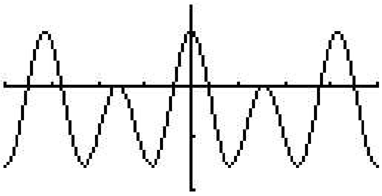
Attention

L'intervalle sur lequel on cherche les solutions est très important. Sur $[0\,;\,2\pi[$, les solutions de l'inéquation sont $\left[\dfrac{5\pi}{6}\,;\,\dfrac{7\pi}{6}\right]$. Plus facile mais "moins marrant"..



Exercice 2

1. Courbe obtenue avec la calculatrice ($X_{\text{Min}} = -4$, $X_{\text{Max}} = 4$, $Y_{\text{Min}} = -2$ et $Y_{\text{Max}} = 1,5$) :



2. Parité de f.

$$\begin{aligned} f(-x) &= \cos(-4x) - \sin^2(-x) \\ &= \cos(4x) - (-\sin(x))^2 \quad \textcolor{blue}{\text{Car } \cos(-x) = \cos(x) \text{ et } \sin(-x) = -\sin(x)} \\ &= \cos(4x) - (\sin(x))^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Notations

$\sin^2(x) = (\sin(x))^2$.
Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on écrit $\sin(x) = \sin x$.

On en déduit que f est paire et donc que la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3. Graphiquement, , f semble admettre pour période π.

$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= \cos(4(x+\pi)) - \sin^2(x+\pi) \\ &= \cos(4x+4\pi) - (\sin(x+\pi))^2 \\ &= \cos(4x) - (-\sin(x))^2 \quad \textcolor{blue}{\text{Car } \cos(X+2k\pi) = \cos(X) \text{ et } \sin(x+\pi) = -\sin(x)} \\ &= \cos(4x) - \sin^2(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

f est une fonction périodique de période π.

Exercice 3

1. f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout x réel :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{3} \times (-\sin(x)) + \cos(x) \\ &= -\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) \end{aligned}$$

Remarques

• La dérivée de $x \longmapsto \cos x$ est $x \longmapsto -\sin(x)$.
• La dérivée de $x \longmapsto \sin x$ est $x \longmapsto \cos(x)$.
Inutile de vous dire qu'il faut les connaître par coeur !

2. La fonction g est un quotient de deux fonctions.
g est dérivable sur $]0\ ;\ \pi[$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $]0\ ;\ \pi[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0\ ;\ \pi[$.

On utilise la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = \cos x$ et $v(x) = \sin x$.

Rappels

$u'(x) = -\sin x$ et $v'(x) = \cos x$.

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{\overbrace{-\sin x}^{u'(x)} \times \overbrace{\sin x}^{v(x)} - \overbrace{\cos x}^{u(x)} \times \overbrace{\cos x}^{v'(x)}}{\underbrace{(\sin x)^2}_{(v(x))^2}} \\
&= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin x)^2} \\
&= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(\sin x)^2} \\
&= \frac{-1}{\sin^2 x}
\end{aligned}$$

3. h est un produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
On utilise donc la formule $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \cos(x)$.

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \overbrace{\cos(x)}^{u'(x)} \times \overbrace{\cos(x)}^{v(x)} + \overbrace{\sin(x)}^{u(x)} \times \overbrace{(-\sin(x))}^{v'(x)} \\
&= \cos^2(x) - \sin^2(x)
\end{aligned}$$

On peut encore réduire

$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$