MATHEMATIQUES

Fonction exponentielle : entraînement savoir-faire 2 (corrigé)

Exercice 1

1. $A = \displaystyle\int_0^3 (x+4)\ \mathrm{d}x$.

On pose $f(x) = x + 4$. Une primitive F de f est définie par $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + 4x$.

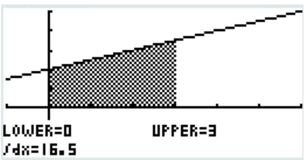
Méthode
On calcule d'abord une primitive de la fonction f.

- $F(3) = \dfrac{3^2}{2} + 4 \times 3 = \dfrac{9}{2} + 12 = 16,5$.
- $F(0) = \dfrac{0^2}{2} + 4 \times 0 = 0$.

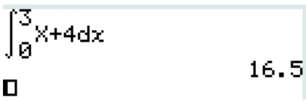
Conseil
Faites ces deux calculs séparés. C'est plus prudent.

Ainsi, $A = \displaystyle\int_0^3 (x+4)\ \mathrm{d}x = F(3) - F(0) = 16,5$.

La fonction f étant positive sur $[0\ ;\ 3]$, l'intégrale est l'aire entre la droite représentant la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 3$. Cette surface est donc égale à 16,5 u.a.



Calculatrice
On représente la fonction f en utilisant le menu Graph. On paramètre la fenêtre d'affichage via F3 avec $X_{Min} = -1$, $X_{Max} = 6$, $X_{Scale} = 1$ $Y_{Min} = -5$, $Y_{Max} = 10$ et $Y_{Scale} = 2$.
Avec le solveur graphique Gsolv F3, puis ▷ puis ∫dx, en tapant 0 (Lower Bound) puis EXE puis 3 (Upper Bound) et encore EXE, on obtient la valeur de cette intégrale, ainsi que son interprétation graphique.



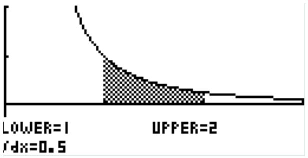
Calculatrice
Avec le menu RUN-MAT, puis OPTN, puis CALC, puis ∫dx, on entre les bornes et la fonction et on obtient la valeur de l'intégrale.

2. $B = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x$.

$f(x) = \dfrac{1}{x^2} = -\underbrace{\dfrac{-1}{x^2}}_{\substack{\text{Dérivée de}\\ x \longmapsto \frac{1}{x}}}$. Ainsi une primitive F de f est définie par $F(x) = -\dfrac{1}{x}$.

- $F(2) = -\dfrac{1}{2} = -0,5$.
- $F(1) = -\dfrac{1}{1} = -1$.

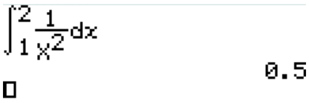
$B = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x = F(2) - F(1) = -0,5 - (-1) = -0,5 + 1 = 0,5$.
La fonction f étant positive sur $[1\ ;\ 2]$, l'intégrale est l'aire entre la courbe représentant la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$. Cette surface est donc égale à 0,5 u.a.



Calculatrice

On représente la fonction f en utilisant le menu Graph. On paramètre la fenêtre d'affichage via V-Window F3 avec $X_{Min} = 0$, $X_{Max} = 3$, $X_{Scale} = 1$ $Y_{Min} = -1$, $Y_{Max} = 2$ et $Y_{Scale} = 1$.

Avec le solveur graphique Gsolv V-Window F3, puis ▷ puis ∫dx, en tapant 1 (Lower Bound) puis EXE puis 2 (Upper Bound) et encore EXE, on obtient la valeur de cette intégrale, ainsi que son interprétation graphique.



Calculatrice

Avec le menu RUN-MAT, puis OPTN, puis CALC, puis ∫dx, on entre les bornes et la fonction et on obtient la valeur de l'intégrale.

3. $C = \displaystyle\int_{-1}^{3} x^2 + 1 \,\mathrm{d}x$.

On pose $f(x) = x^2 + 1$. Une primitive F de f est définie par $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + x$.

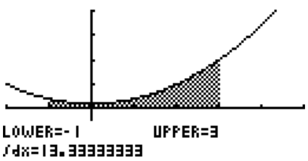
- $F(3) = \dfrac{3^3}{3} + 3 = 12$.
- $F(-1) = \dfrac{(-1)^3}{3} - 1 = \dfrac{-1}{3} - 1 = \dfrac{-1}{3} - \dfrac{3}{3} = -\dfrac{4}{3}$.

Courage

Un petit calcul de fractions, ça maintient la forme !

$C = \displaystyle\int_{-1}^{3} x^2 + 1 \,\mathrm{d}x = F(3) - F(-1) = 12 - \left(-\frac{4}{3}\right) = 12 + \frac{4}{3} = \frac{36}{3} + \frac{4}{3} = \frac{40}{3} \simeq 13,33$.

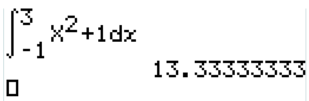
La fonction f étant positive sur $[1\ ;\ 2]$, l'intégrale est l'aire entre la courbe représentant la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$. Cette surface est donc égale à 0,5 u.a.



Calculatrice

On représente la fonction f en utilisant le menu Graph. On paramètre la fenêtre d'affichage via V-Window F3 avec $X_{Min} = 2$, $X_{Max} = 5$, $X_{Scale} = 1$ $Y_{Min} = -10$, $Y_{Max} = 20$ et $Y_{Scale} = 5$.

Avec le solveur graphique Gsolv V-Window F3, puis ▷ puis ∫dx, en tapant -1 (Lower Bound) puis EXE puis 3 (Upper Bound) et encore EXE, on obtient la valeur de cette intégrale, ainsi que son interprétation graphique.



Calculatrice

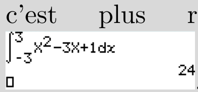
Avec le menu RUN-MAT, puis OPTN, puis CALC, puis ∫dx, on entre les bornes et la fonction et on obtient la valeur de l'intégrale.

Exercice 2

1. $A = \displaystyle\int_{-3}^{3} \left(x^2 - 3x + 1\right) \,\mathrm{d}x$

On pose $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Une primitive F de f est définie par : $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - 3 \times \dfrac{x^2}{2} + x = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + x$.

Calculatrice

Avec la calculatrice, c'est plus rapide : .

- $F(3) = \dfrac{3^3}{3} - \dfrac{3 \times 3^2}{2} + 3 = 9 - 13,5 + 3 = -1,5$.
- $F(-3) = \dfrac{(-3)^3}{3} - \dfrac{3 \times (-3)^2}{2} - 3 = -9 - 13,5 - 3 = -25,5$.

$A = \displaystyle\int_{-3}^{3} \left(x^2 - 3x + 1\right) \,\mathrm{d}x = F(3) - F(-3) = -1,5 - (-25,5) = 24$.

2. $B = \displaystyle\int_2^6 \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)\,\mathrm{d}x$

On pose $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}x^2 - 1$.

Une primitive F de f est définie par : $F(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{x^3}{3} - x = \dfrac{x^3}{6} - x$.

Conseil
J'ai transformé l'écriture de $f(x)$ pour simplifier le calcul d'une primitive.

- $F(6) = \dfrac{6^3}{6} - 6 = 30$.
- $F(2) = \dfrac{2^3}{6} - 2 = \dfrac{8}{6} - \dfrac{12}{6} = -\dfrac{2}{3}$.

$B = \displaystyle\int_2^6 \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)\,\mathrm{d}x = F(6) - F(2) = 30 - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{92}{3} \simeq 30,67.$

Calculatrice
N'hésitez pas à prendre votre calculatrice pour faire ces petits calculs de fractions. Avec la calculatrice :

3. $C = \displaystyle\int_{-2}^{1} 2\mathrm{e}^{2x+1}\,\mathrm{d}x$

On pose $f(x) = \underbrace{2}_{u'(x)}\underbrace{\mathrm{e}^{2x+1}}_{\mathrm{e}^{u(x)}}$.

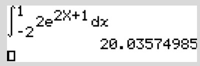
Une primitive F de f est définie par : $F(x) = \mathrm{e}^{2x+1}$.

A reconnaître
Cette forme $u'\mathrm{e}^u$ est à reconnaître ! Si $f = u'\mathrm{e}^u$, alors $F = \mathrm{e}^u$.

- $F(1) = \mathrm{e}^{2\times 1+1} = \mathrm{e}^3$.
- $F(-2) = \mathrm{e}^{2\times(-2)+1} = \mathrm{e}^{-3}$.

$C = \displaystyle\int_{-2}^{1} 2\mathrm{e}^{2x+1}\,\mathrm{d}x = F(1) - F(-2) = \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^{-3} \simeq 20,04.$

Calculatrice
Avec la calculatrice :



4. $D = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x} + 2\,\mathrm{d}x$

On pose $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2$.

Une primitive F de f est définie par : $F(x) = \ln x + 2x$.

N'oubliez pas !
Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est $x \longmapsto \ln x$.

- $F(2) = \ln 2 + 4$.
- $F(1) = \ln 1 + 2 = 2$.

$D = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x} + 2\,\mathrm{d}x = F(2) - F(1) = \ln 2 + 4 - 2 = \ln 2 + 2 \simeq 2,69.$

Calculatrice
Avec la calculatrice :

Exercice 3

- Une primitive de $x \longmapsto -x^2 + 4x - 1$ est $x \longmapsto -\dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x$.
  Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (-x^2 + 4x - 1)\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x\right]_{-1}^{1} \\
&= \left(-\frac{1^3}{3} + 2 \times 1^2 - 1\right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + 2 \times (-1\right. \\
&= -\frac{1}{3} + 2 - 1 - \frac{1}{3} - 2 - 1 \\
&= -\frac{2}{3} - 2 \\
&= -\frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Présentation
Avec la calculatrice : Voici une autre façon de présenter les calculs.

- Une primitive de $x \longmapsto 2\cos(x) - 3\sin(x)$ est $x \longmapsto 2\sin(x) + 3\cos(x)$.
  Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(x) - 3\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \left[2\sin(x) + 3\cos(x)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \left(2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 2 - \frac{5}{2}\sqrt{2}\end{aligned}$$

Pensez-y !

Vous pouvez prendre votre calculatrice pour vérification.

Primitive

$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{\overbrace{2x}^{u'(x)}}{\underbrace{2\sqrt{x^2+1}}_{2\sqrt{u(x)}}}$ est de la forme

$f = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ dont une primitive est $\sqrt{u}$.

- Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ est $x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$.

  Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 \\ &= \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 \\ &= \sqrt{1^2+1} - \sqrt{0^2+1} \\ &= \sqrt{2} - 1\end{aligned}$$

Primitive

$f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} = \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{u'(x)} \times \underbrace{\ln x}_{u(x)}$ est de la forme

$f = u' \times u$ dont une primitive est $\dfrac{u^2}{2}$.

- Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{2} \times (\ln(x)^2)$.

  Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2} \times (\ln(x)^2)\right]_1^{\mathrm{e}} \\ &= \frac{1}{2} \times (\ln(\mathrm{e})^2) - \frac{1}{2} \times (\ln(1)^2) \\ &= \frac{1}{2} \times 1^2 - \frac{1}{2} \times 0^2 \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 4

a. Étudier le signe de f sur l'intervalle $[-4\ ;\ 2]$.
On étudie le signe de $2x^2 + 2x - 3$ à l'aide du discriminant. $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$.

Deux racines réelles $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$.
On dresse le tableau de signes de f sur $[-4\ ;\ 2]$:

x	-4		-3		1		2
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

b. Calcul de l'aire.

Explications

Lorsque f est positive sur $[a\ ;\ b]$, l'aire est $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ et lorsque f est négative sur $[c\ ;\ d]$, l'aire est $\displaystyle -\int_c^d f(x)\ \mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\mathscr{D}) &= \int_{-4}^{-3} f(x)\ \mathrm{d}x - \int_{-3}^{1} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_{1}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x\right]_{-4}^{-3} - \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x\right]_{-3}^{1} + \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x\right]_{1}^{2} \\ &= \left(9 - \frac{20}{3}\right) - \left(-\frac{5}{3} - 9\right) + \left(\frac{2}{3} - \left(-\frac{5}{3}\right)\right) = 9 - \frac{20}{3} + \frac{5}{3} + 9 + \frac{2}{3} + \frac{5}{3} = 18 - \frac{8}{3} = \frac{46}{3} \simeq 15,33 u.a.\end{aligned}$$

Exercice 5

- On détermine dans un premier temps les points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ en résolvant sur $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = g(x)$. $f(x) = g(x) \iff x^2 - x - 2 = 0$
  $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$.

  Deux racines réels $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$.

  De plus, pour tout $x \in [-1\ ;\ 2]$, $f(x) \geqslant g(x)$.

Explications

L'aire est donnée par l'intégrale de la différence "fonction de dessus − fonction de dessous ". Donc il est important d'avoir cette comparaison entre f et g sur $[-1\ ;\ 2]$.

- On calcule l'aire du domaine $\mathscr{D}$ à l'aide d'une intégrale :
  $$\begin{aligned}\mathscr{A}(\mathscr{D}) &= \int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))\ \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)\ \mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{2} = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = 4,5\ u.a.\end{aligned}$$

Exercice 6

1. a. On démontre cet encadrement en deux étapes :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 \geqslant 1$ donc $\dfrac{1}{x^2+1} \leqslant 1$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.
- On étudie le signe de $\dfrac{1}{x^2+1} - (-x^2+1)$ sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{x^2+1} - (-x^2+1) = \frac{1}{x^2+1} + x^2 - 1 = \frac{1}{x^2+1} + \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1 + x^4 - 1}{x^2+1} = \frac{x^4}{x^2+1} \geqslant 0$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{x^2+1} - (-x^2+1) \geqslant 0 \iff \dfrac{1}{x^2+1} \geqslant -x^2 + 1$.

On en déduit l'encadrement $-x^2 + 1 \leqslant \dfrac{1}{x^2+1} \leqslant 1$ sur $\mathbb{R}$.

b. On obtient en particulier sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$: $-x^2 + 1 \leqslant \dfrac{1}{x^2+1} \leqslant 1$ et donc :

$$\begin{aligned}&\int_0^1 (-x^2+1)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\ \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 1\ \mathrm{d}x \\ \iff &\left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^1 \leqslant \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\ \mathrm{d}x \leqslant [x]_0^1 \\ \iff &\frac{2}{3} \leqslant \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\ \mathrm{d}x \leqslant 1\end{aligned}$$

2. Pour tout $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$: $0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \iff 0 \leqslant \frac{\sin(x)}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$.
On en déduit donc :

$$\begin{aligned}
& 0 \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
\iff & 0 \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
\iff & 0 \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant -\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \\
\iff & 0 \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{\pi} \simeq 0,637
\end{aligned}$$

Exercice 7

$\mu = \frac{1}{3}\int_0^3 (3x^2 - 6x + 1,5)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \times \left[x^3 - 3x^2 + 1,5x\right]_0^3 = \frac{1}{3} \times 4,5 = 1,5$.

On en déduit que le bénéfice moyen est de 1500 € pour une quantité x de produit, variant de 0 à 3 kg.