MATHEMATIQUES
Limites de fonctions : entraînement 1 (corrigé)

Exercice 1

1. D'après le tableau 2 est une valeur interdite. On en déduit que $c = 2$.
Ainsi, $f(x) = a + \dfrac{b}{x-2}$.

2. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x - c = +\infty$, par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{b}{x-c} = 0$, et par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} a + \dfrac{b}{x-c} = a$.
D'après le tableau de variations, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$, on en déduit $a = -1$.

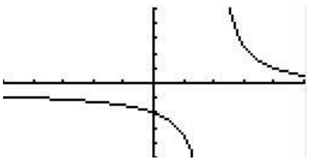
3. D'après les questions précédentes, $f(x) = -1 + \dfrac{b}{x-2}$.

D'après le tableau de variations, $f(0) = -4$. Ainsi,

$$\begin{aligned} -1 + \frac{b}{0-2} &= -4 \\ -1 - \frac{b}{2} &= -4 \\ -\frac{b}{2} &= -3 \\ b &= 6 \end{aligned}$$

Ainsi la fonction f cherchée a pour expression :

$$f(x) = -1 + \frac{6}{x-2}$$



Calculatrice

Utilisez votre calculatrice pour vérifier votre résultat.
Le paramétrage de la fenêtre graphique est : $X_{Min} = -5$, $X_{Max} = 5$, $X_{Scale} = 1$ $Y_{Min} = -10$, $Y_{Max} = 10$ et $Y_{Scale} = 2$.

Exercice 2

La fonction f est positive sur $]-2\,;\,+\infty[$, donc la fonction g est aussi définie sur $]-2\,;\,+\infty[$.

- Limite en -2 :

Graphiquement, $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty$

Lecture graphique

Quand x se rapproche de -2 (en étant supérieur à -2), les images $f(x)$ augmentent et deviennent de plus en plus grandes (la courbe est "en haut").

En posant $X = f(x)$, on a :

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) &= {\color{red}+\infty} \\ \lim_{X \to {\color{red}+\infty}} \sqrt{X} &= +\infty \end{aligned}\right\} \text{ Par composition, } \lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \sqrt{f(x)} = +\infty.$$

- Limite en $+\infty$:

Graphiquement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

Lecture graphique

Quand x trend vers $+\infty$, les images $f(x)$ se rapprochent de 2 (la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale en $+\infty$).

En posant $X = f(x)$, on a :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{X\to 2} \sqrt{X} = \sqrt{2}\end{array}\right\} \text{ Par composition, } \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{2}.$$

Exercice 3

1. En termes de recherche de limites, les quatre formes indéterminées sont : $\infty - \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$ et $0 \times \infty$

2. a.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -3\end{array}\right\} \text{ Par somme, } \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$$

b.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -3\end{array}\right\} \text{ Par produit, } \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) \times g(x)) = -\infty$$

c.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -3. \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \text{ Par quotient, } \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

d.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -3 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0\end{array}\right\} \text{ Par somme, } \lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) + h(x)) = -3$$

e.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -3 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0\end{array}\right\} \text{ Par produit, } \lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) \times h(x)) = 0$$

f.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -3 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0^- \quad \text{Car } h(x) < 0\end{array}\right\} \text{ Par quotient, } \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = +\infty$$

Exercice 4

La fonction f est définie sur $]-1\ ;\ 1[\cup]1\ +\infty[$.

> **Remarque**
> x^2-1 s'annule en -1 et 1. Ces deux valeurs annulent le dénominateur, ce sont des valeurs interdites.

- Calcul de $f'(x)$.

f est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition.

La fonction f est un quotient de deux fonctions.
On utilise la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u(x)=x$ et $v(x)=x^2-1$.

> **Remarque**
> $u'(x)=1$ et $v'(x)=2x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\overbrace{1}^{u'(x)}\times\overbrace{(x^2-1)}^{v(x)}-\overbrace{x}^{u(x)}\times\overbrace{(2x)}^{v'(x)}}{\underbrace{(x^2-1)^2}_{(v(x))^2}} \\ &= \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

- Calcul des limites.

$$f(x)=\frac{x}{x^2-1}=\frac{x}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{x\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}.$$

> **Remarque**
> Par quotient, la limite en plus l'infini donne la forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \end{array}\right\}\ \text{Par produit, } \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{1}{x^2}\right))=+\infty$$

Par inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}=0.$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. On en déduit que la droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

Pour les limites en -1 et 1, on a besoin du tableau de signes de x^2-1 :

x	-1		1		$+\infty$
Signe de x^2-1	0	$-$	0	$+$	

> **Explication**
> x^2-1 est du signe de $a=1$ sauf entre ses racines.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} x=-1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}(x^2-1)=0^- \end{array}\right\}\ \text{Par quotient, } \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\frac{x}{x^2-1}=+\infty$$

On en déduit que la droite d'équation $x=-1$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

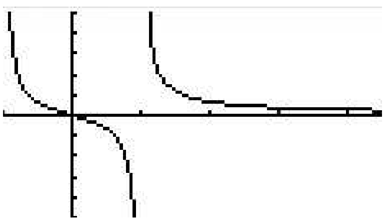
$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x = 1\\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (x^2-1) = 0^-\end{array}\right\}\quad \text{Par quotient,}\ \lim_{\substack{x\to -1\\ x<1}} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x = 1\\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x^2-1) = 0^+\end{array}\right\}\quad \text{Par quotient,}\ \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$$

On en déduit que la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

- Tableau de variations complet :

x	-1		1		$+\infty$
$-x^2-1$		$-$		$-$	
$(x^2-1)^2$	0	$+$	0	$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$\Vert$	$0 \searrow +\infty$	$\Vert$	$+\infty \searrow 0$	

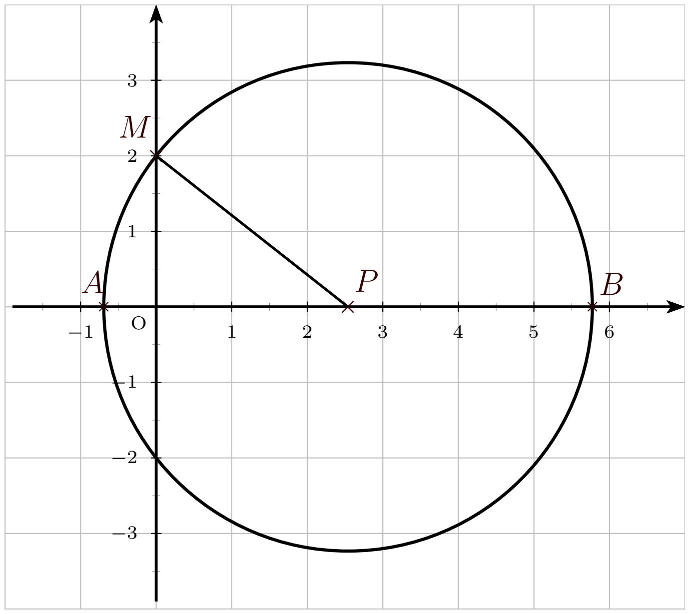


Calculatrice

Utilisez votre calculatrice pour vérifier votre résultat.
Le paramétrage de la fenêtre graphique est : $X_{Min} = -1$, $X_{Max} = 4$, $X_{Scale} = 1$ $Y_{Min} = -5$, $Y_{Max} = 5$ et $Y_{Scale} = 1$.

Exercice 5

1. La figure s'impose pour visualiser la situation :



Sur cette figure $OP = x$ et $OM = 2$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OMP rectangle en O :

$$\begin{array}{rcl} OP^2 + OM^2 & = & MP^2 \\ x^2 + 2^2 & = & MP^2 \\ MP^2 & = & x^2 + 4 \\ MP & = & \sqrt{x^2+4} \end{array}$$

On en déduit que $MP = AP = \sqrt{x^2+4}$.
$OA = AP - OP = \sqrt{x^2+4} - x$.

2. Il s'agit de calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Par différence, on a la forme indéterminée $\infty - \infty$.

On pense à la quantité conjuguée pour lever l'indétermination :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \dfrac{\overbrace{(\sqrt{x^2+4}-x)}^{a-b}\overbrace{(\sqrt{x^2+4}+x)}^{a+b}}{\sqrt{x^2+4}+x} \\ & = & \dfrac{\overbrace{x^2+4-x^2}^{a^2-b^2}}{\sqrt{x^2+4}+x} \\ & = & \dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}+x} \end{array}$$

Quantité conjuguée

On multiplie et divise par la quantité conjuguée de $\sqrt{x^2+4} - x$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+4} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \text{Par somme, } \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+4} + x = +\infty$$

Explication

La limite de $\sqrt{x^2+4}$ s'obtient par composition.
En effet, $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2+4) = +\infty$, donc par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+4} = +\infty$.

Par quotient, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

La distance OA se rapproche de 0 quand x devient très grand.