MATHEMATIQUES
Limites de fonctions : entraînement savoir-faire (corrigé)

Exercice 1

a. Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2+x-8\right)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x-8=+\infty\end{array}\right\} \text{ Par somme, } \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+x-8\right)=+\infty$$

Conseil
Apprenez à présenter vos calculs de limites.

b. Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}(1-8x)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1-8x=-\infty\end{array}\right\} \text{ Par produit, } \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(1-8x)=-\infty$$

c. Calcul de $\lim\limits_{\substack{x\to 9\\ x>9}} \dfrac{4}{x-9}$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 9\\ x>9}} x-9=0^+$.

Par passage à l'inverse et par produit (par 4), $\lim\limits_{\substack{x\to 9\\ x>9}} \dfrac{4}{x-9}=+\infty$.

Pensez-y !
Le signe de $x-9$ est essentiel.
Ici, $x-9>0$ car $x>9$.
Vous pouvez aussi prendre votre calculatrice et tracer la courbe de la fonction pour confirmer le résultat trouvé.

d. Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}=0\end{array}\right\} \text{ Par somme, } \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$$

e. Calcul de $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \dfrac{x-5}{x+1}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} x-5=-6 \\ \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} x+1=0^-\end{array}\right\} \text{ Par quotient, } \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\dfrac{x-5}{x+1}=+\infty$$

Encore une fois
Le signe de $x-1$ est essentiel.
Ici, $x+1<0$ car $x<-1$ (x prend des valeurs de plus en plus proches de -1 en restant inférieur à -1).

f. Calcul de $\lim\limits_{x\to-\infty} 4-x^3$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$, donc par différence, $\lim\limits_{x\to-\infty} 4-x^3=+\infty$

Exercice 2

1. $-x^2+9x-20$ a deux racines : 4 et 5.
$-x^2+9x-20$ est du signe de $a=-1$ sauf entre ses racines. Ainsi :

x	$-\infty$		4		5		$+\infty$
$-x^2+9x-20$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Importance du signe

Le signe de $f(x)$ est essentiel.
Lorsque x prend des valeurs proches de 4 en restant strictement supérieur à 4, $-x^2+9x-20>0$. Ce résultat est obtenu grâce au tableau de signes précédent.

2. $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}} f(x)=0^+$, donc par passage à l'inverse, $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}} \dfrac{1}{f(x)}=+\infty$.

Exercice 3

Explications

Identifiez ce qui est X. Calculez sa limite, puis conclure par composition.

a. Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+5}$.

On pose $X=x+5$. On a donc $\sqrt{x+5}=\sqrt{X}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\overbrace{(x+5)}^{X}={\color{red}+\infty}\\ \lim\limits_{X\to{\color{red}+\infty}}\sqrt{X}=+\infty\end{array}\right\}\text{ Par composition, }\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+5}=+\infty$$

b. Calcul de $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3x+1}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3x+1}$.

On pose $X=x^2-3x+1$. On a donc $\sqrt{x^2-3x+1}=\sqrt{X}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}-3x+1=+\infty\end{array}\right\}\text{ Par somme, }\lim_{x\to-\infty}x^2-3x+1=+\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\overbrace{(x^2-3x+1)}^{X}={\color{red}+\infty}\\ \lim\limits_{X\to{\color{red}+\infty}}\sqrt{X}=+\infty\end{array}\right\}\text{ Par composition, }\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+1}=+\infty$$

c. Calcul de $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\left(\dfrac{x}{x-2}\right)^2$.

On pose $X=\dfrac{x}{x-2}$. On a donc $\left(\dfrac{x}{x-2}\right)^2=X^2$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}x=2\\ \lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}x-2=0^-\end{array}\right\}\text{ Par quotient, }\lim_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{x}{x-2}=-\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\dfrac{x}{x-2}={\color{red}-\infty}\\ \lim\limits_{X\to{\color{red}-\infty}}X^2=+\infty\end{array}\right\}\text{ Par composition, }\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-2}\right)^2=+\infty$$

Exercice 4

a. Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-8x+2)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty\\[2ex] \lim\limits_{x\to+\infty} -8x+2=-\infty\end{array}\right\}\ \text{Par somme, on a une forme indéterminée (« } \infty-\infty \text{ »).}$$

Méthode

Pour déterminer la limite en l'infini d'une fonction polynôme, après avoir identifié une forme indéterminée, factorisez par le terme de plus haut degré et utilisez la limite d'un produit.

$x^2-8x+2=x^2\left(1-\dfrac{8x}{x^2}+\dfrac{2}{x^2}\right)=x^2\left(1-\dfrac{8}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{8}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)=1.\\[2ex] \lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty\end{array}\right\}\ \text{Par produit, } \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\dfrac{8}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)=+\infty$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-8x+2)=+\infty$.

b. Calcul de $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+6}{7-3x}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x+6=-\infty\\[2ex] \lim\limits_{x\to-\infty} 7-3x=+\infty\end{array}\right\}\ \text{Par quotient, on a une forme indéterminée (« } \dfrac{\infty}{\infty} \text{ »).}$$

Méthode

Pour déterminer la limite en l'infini d'une fonction rationnelle, après avoir identifié une forme indéterminée, factorisez au numérateur et au dénominateur par le terme de plus haut degré et utilisez la limite d'un quotient.

$$\frac{x+6}{7-3x}=\frac{\cancel{x}\left(1+\dfrac{6}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\dfrac{7}{x}-3\right)}=\frac{1+\dfrac{6}{x}}{\dfrac{7}{x}-3}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{6}{x}\right)=1\\[2ex] \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{7}{x}-3\right)=-3\end{array}\right\}\ \text{Par quotient, } \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+\dfrac{6}{x}}{\dfrac{7}{x}-3}=-\frac{1}{3}$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+6}{7-3x}=-\dfrac{1}{3}$.

c. Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} \times (x^2+1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0. \\ \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^2+1 = +\infty \end{array}\right\} \text{ Par produit, on a une forme indéterminée (« } 0 \times \infty \text{ »).}$$

$\dfrac{1}{x} \times (x^2+1) = \dfrac{x^2}{x} + \dfrac{1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$.

Méthode

Pour lever l'indétermination, l'idée est de transformer l'écriture. Ici en développant, on passe d'un produit à une somme et il n'y a plus d'indétermination.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{ Par somme, } \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} \times (x^2+1) = +\infty$.