MATHEMATIQUES
Limites de fonctions : entraînement savoir-faire (corrigé)

Exercice 1

a. Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$.

Pour tout réel $x > 0$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

Ainsi en divisant par $x > 0$, $-\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$.

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 = \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$.
Donc, en utilisant le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

b. Calcul de $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - \cos x)$.

Pour tout réel $x < 0$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.
En multipliant par (-1), $1 \geqslant -\cos x \geqslant -1$.
En ajoutant x, $1 + x \geqslant x - \cos x \geqslant -1 + x$.

Or, $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + x = -\infty$.
Donc, par comparaison, $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - \cos x) = -\infty$.

Attention

Pour conclure ici, on a utilisé la limite de $1 + x$ pas celle de $-1+x$. En effet, $\lim\limits_{x \to -\infty} (-1+x) = -\infty$, mais cela ne permet pas d'en déduire la limite de $x - \cos x$. En effet, de savoir que $x - \cos x$ est "plus grand que $-\infty$ " n'apporte rien !

Exercice 2

- $\lim\limits_{x \to +\infty} 5x - 2 = +\infty$, donc par comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} 5x + 2 = -\infty$, donc par comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Exercice 3

Cours

Les asymptotes se déduisent de deux types de limite :

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$. Asymptote horizontale d'équation $y = \ell$.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$. Asymptote verticale d'équation $x = a$.

Seules les limites **a.**, **c.**, **d.** et **f.** conduisent à une asymptotes.

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. On en déduit que la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

c. $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} h(x) = -\infty$. On en déduit que la droite d'équation $x = 3$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

d. $\lim\limits_{x \to -\infty} \ell(x) = -5,1$. On en déduit que la droite d'équation $y = -5,1$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

f. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} v(x) = +\infty$. On en déduit que la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.