
MATHÉMATIQUES

Fonction logarithme népérien : entraînement 2

Exercice 1

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel strictement positif. Le but de l'exercice est d'étudier l'équation

$$(E_n) : \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n}$$

ayant pour inconnue le nombre réel strictement positif x .

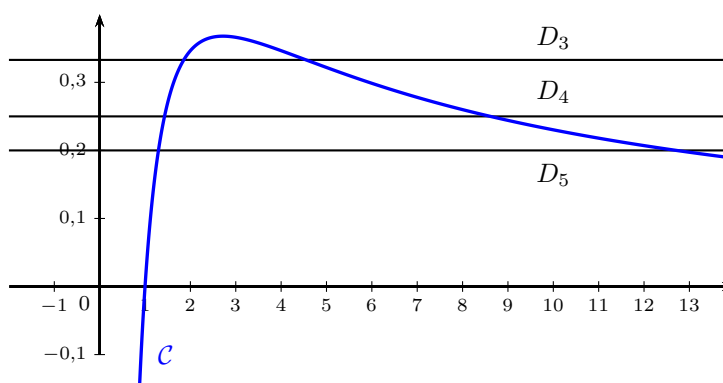
Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

On a donné ci-dessous, la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f dans un repère orthogonal.



1. Étudier les variations de la fonction f .
2. Déterminer son maximum.

Partie B

1. Montrer que, pour $n \geq 3$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1 ; e]$ notée α_n .
2. D'après ce qui précède, pour tout entier $n \geq 3$, le nombre réel α_n est solution de l'équation (E_n) .
 - a. Sur le graphique sont tracées les droites D_3 , D_4 et D_5 d'équations respectives $y = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{5}$.
Conjecturer le sens de variation de la suite (α_n) .
 - b. Comparer, pour tout entier $n \geq 3$, $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$.
Déterminer le sens de variation de la suite (α_n) .
 - c. En déduire que la suite (α_n) converge. *Il n'est pas demandé de calculer sa limite.*
3. On admet que, pour tout entier $n \geq 3$, l'équation (E_n) possède une autre solution β_n telle que

$$1 \leq \alpha_n \leq e \leq \beta_n.$$

- a. On admet que la suite (β_n) est croissante.
Établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3,

$$\beta_n \geq n \frac{\beta_3}{3}.$$

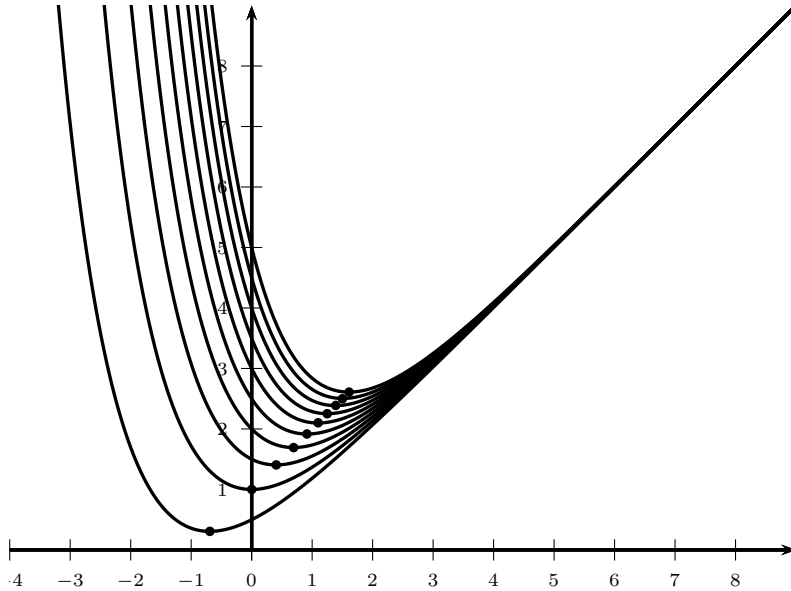
- b. En déduire la limite de la suite (β_n) .

Exercice 2

Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur \mathbb{R} par :

$$f_k(x) = x + ke^{-x}.$$

On note \mathcal{C}_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé. On a représenté ci-dessous quelques courbes \mathcal{C}_k pour différentes valeurs de k .



Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur \mathbb{R} . La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe \mathcal{C}_k . Il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés.

Est-ce le cas ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....