Lycée Louise Michel (Gisors)
Terminale S

MATHEMATIQUES
Fonction logarithme népérien : entraînement 3

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\left(\ln x\right)^2}{x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite en 0 de la fonction f et interpréter graphiquement le résultat.

2. a. Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$,

$$f(x) = 4\left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2.$$

b. En déduire que l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

3. On admet que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\ln(x)\big(2 - \ln(x)\big)}{x^2}.$$

b. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs du nombre réel x strictement positif.

c. Calculer $f(1)$ et $f\left(\mathrm{e}^2\right)$.

On obtient alors le tableau de variations ci-dessous.

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$	$\searrow$	0

4. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur $]0\ ;\ +\infty[$ et donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exercice 2

Dans cet exercice, on munit le plan d'un repère orthonormé.

On a représenté ci-dessous la courbe d'équation :

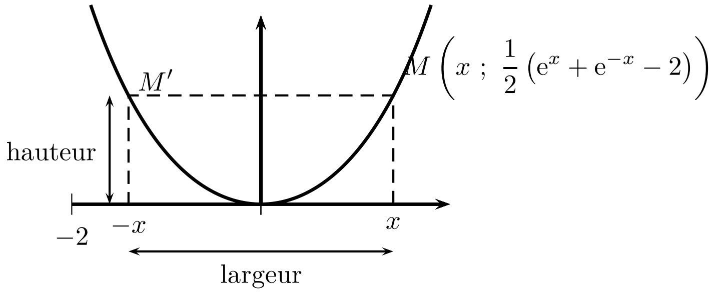
$$y = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x} - 2\right).$$

Cette courbe est appelée une « chaînette ».

On s'intéresse ici aux « arcs de chaînette » délimités par deux points de cette courbe symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Un tel arc est représenté sur le graphique ci-dessous en trait plein.

On définit la « largeur » et la « hauteur » de l'arc de chaînette délimité par les points M et M' comme indiqué sur le graphique.



Le but de l'exercice est d'étudier les positions possibles sur la courbe du point M d'abscisse x strictement positive afin que la largeur de l'arc de chaînette soit égale à sa hauteur.

1. Justifier que le problème étudié se ramène à la recherche des solutions strictement positives de l'équation

$$(E) : e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0.$$

2. On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = e^x + e^{-x} - 4x - 2.$$

a. Vérifier que pour tout $x > 0$, $f(x) = x\left(\dfrac{e^x}{x} - 4\right) + e^{-x} - 2$.

b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$, où x appartient à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

b. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ équivaut à l'équation : $(e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0$.

c. En posant $X = e^x$, montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet pour unique solution réelle le nombre $\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)$.

4. On donne ci-dessous le tableau de signes de la fonction dérivée f' de f :

x	0		$\ln(2+\sqrt{5})$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

a. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive que l'on notera α.

5. On considère l'algorithme suivant où les variables a, b et m sont des nombres réels :

```
Tant que b − a > 0,1 faire :
    m ← (a + b)/2
    Si e^m + e^(−m) − 4m − 2 > 0, alors :
        b ← m
    Sinon :
        a ← m
    Fin Si
Fin Tant que
```

a. Avant l'exécution de cet algorithme, les variables a et b contiennent respectivement les valeurs 2 et 3.

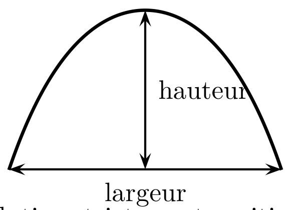
Que contiennent-elles à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau ci-contre avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme.

m	a	b	$b-a$
	2	3	1
2,5			
...	...	...	

b. Comment peut-on utiliser les valeurs obtenues en fin d'algorithme à la question précédente ?

6. La *Gateway Arch*, édifiée dans la ville de Saint-Louis aux États-Unis, a l'allure ci-contre.
Son profil peut être approché par un arc de chaînette renversé dont la largeur est égale à la hauteur.



La largeur de cet arc, exprimée en mètre, est égale au double de la solution strictement positive de l'équation :

$$(E') : \mathrm{e}^{\frac{t}{39}} + \mathrm{e}^{-\frac{t}{39}} - 4\frac{t}{39} - 2 = 0.$$

Donner un encadrement de la hauteur de la *Gateway Arch*.