

MATHEMATIQUES
Fonction logarithme népérien : entraînement savoir-faire (corrigé)

Exercice 1

x	0	1	$+\infty$
Signe de $\ln'(x) = \frac{1}{x}$		+	
Variations de ln	$-\infty$	0	$+\infty$

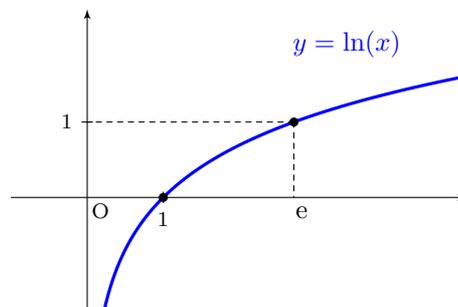


Tableau de signes de la fonction ln sur $]0; +\infty[$:

x	0	1	$+\infty$
Signe de $\ln(x)$	-	0	+

Exercice 2

Propriétés

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \quad ; \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \quad ; \quad \ln(x^n) = n \ln(x) \quad ; \quad \ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$$

1. $A = \ln(e^{-3}) + e^{-\ln(2)} = -3 + e^{\ln(\frac{1}{2})} = -3 + 0,5 = -2,5.$

$$B = \frac{\ln(e)}{\ln(e^2)} - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{\ln(e)}{2\ln(e)} - (-\ln(e)) = \frac{1}{2} + 1 = 1,5.$$

$$C = \ln(16) - 7\ln(2) + 4\ln(32) + 3\ln\left(\frac{1}{8}\right) = 4\ln(2) - 7\ln(2) + 4 \times 5\ln(2) - 3 \times 3\ln(2) = 12\ln(2).$$

$$D = 4\ln(125) - 6\ln(25) + 2\ln\left(\frac{1}{5}\right) = 4 \times 3\ln(5) - 6 \times 2\ln(5) - 2\ln(5) = -2\ln(5).$$

2. $E = \ln(100) = \ln(2^2 \times 5^2) = 2\ln(2) + 2\ln(5)$ $F = \ln(\sqrt{10}) = \frac{1}{2}\ln(2 \times 5) = \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(5).$

$$G = \ln(0,02) = \ln\left(\frac{2}{100}\right) = \ln(2) - (2\ln(2) + 2\ln(5)) = -\ln(2) - 2\ln(5).$$

$$H = \ln(80e) = \ln(16 \times 5 \times e) = 4\ln(2) + \ln(5) + 1.$$

Exercice 3

$$\bullet \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} -4x = 0 \end{array} \right\} \text{Par somme, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x - 4x = -\infty$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -4x = -\infty \end{array} \right\} \text{Par somme, on obtient une F.I. du type « } \infty - \infty \text{ ».}$$

En factorisant par x , on trouve : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln(x) - 4x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - 4 \right)$.

A connaître

Limite à connaître : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. Pensez que $\ln x$ part à l'infini mais très doucement, contrairement à x . Donc, on divise quelque chose de très petit par quelque chose de très grand.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - 4 \right) = -4 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \text{Par produit } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - 4 \right) = -\infty.$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

$$\bullet \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 2x + 1 = 1 \\ \lim_{X \rightarrow 1} \ln X = 0 \end{array} \right\} \text{Par composition, } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2x + 1) = 0$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 \left(1 - \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) = x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right).$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \end{array} \right\} \text{Par produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x + 1 = +\infty$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x + 1 = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty \end{array} \right\} \text{Par composition, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 2x + 1) = +\infty.$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1 \end{array} \right\} \text{Par quotient, } \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty.$$

Donc, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{e^x} = -\infty$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{array} \right\} \text{On obtient une F.I. du type « } \frac{\infty}{\infty} \text{ ».}$$

Indétermination

Pour lever cette indétermination, on fait apparaître des limites connues :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

On a $\frac{\ln(x)}{e^x} = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{x}{e^x}$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \end{array} \right\} \text{Par produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{x}{e^x} = 0.$$

Donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$.

Exercice 4

1. Résolution de l'équation $(e^{2x} - 4)(2e^x - 6) = 0$

$$\begin{aligned} (e^{2x} - 4)(2e^x - 6) &= 0 \\ e^{2x} - 4 = 0 &\text{ ou } 2e^x - 6 = 0 \\ e^{2x} = 4 &\text{ ou } e^x = 3 \\ e^{2x} = e^{\ln 4} &\text{ ou } e^x = e^{\ln 3} \\ 2x = \ln 4 &\text{ ou } x = \ln 3 \quad \text{On utilise } e^x = e^y \iff x = y. \\ x = \frac{\ln 4}{2} &\text{ ou } x = \ln 3 \end{aligned}$$

Méthodes

On reconnaît une équation produit nul.
On se ramène à des équations du type $e^X = e^Y$.

Remarque

On a aussi : $\frac{\ln 4}{2} = \frac{2 \ln 2}{2} = \ln 2$.

2. On résout l'inéquation sur $] -1; +\infty[$ car $x + 1 > 0$:

$$\begin{aligned} 1 - 2 \ln(x + 1) &\geq 5 \\ -2 \ln(x + 1) &\geq 4 \\ \ln(x + 1) &\leq -2 \quad \text{On divise par } -2 \\ \ln(x + 1) &\leq \ln(e^{-2}) \\ x + 1 &\leq e^{-2} \\ x &\leq e^{-2} - 1 \end{aligned}$$

Méthode

On se ramène à des inéquations du type $\ln X \leq \ln Y$ ou $\ln X \geq \ln Y$.

ATTENTION

Attention à l'ensemble de solutions.
N'oubliez pas que x doit être strictement supérieur à -1 !

D'où $S =] -1; e^{-2} - 1]$.

3. Recherche du plus petit entier naturel.

$$\begin{aligned} 12 \times (0,8)^n + 1 &< 4 \\ (0,8)^n &< 0,25 \\ \ln(0,8^n) &< \ln(0,25) \quad \text{Car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[. \\ n \ln(0,8) &< \ln(0,25) \quad \text{Car } \ln a^n = n \ln a. \\ n &> \frac{\ln(0,25)}{\ln(0,8)} \quad \text{Car } \ln 0,8 < 0. \end{aligned}$$

D'où $n = 7$ car $\frac{\ln(0,25)}{\ln(0,8)} \simeq 6,21$.

4. On résout l'équation pour $x > 0$ et $x > 3$ donc sur $]3; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \ln(x) + \ln(x-3) &= 2 \ln(2) \\ \ln(x(x-3)) &= \ln(2^2) \quad \text{Car } \ln x + \ln y = \ln(xy). \\ \ln(x^2 - 3x) &= \ln(4) \\ x^2 - 3x &= 4 \\ x^2 - 3x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Toujours pareil

On se ramène à une équation du type : $\ln X = \ln Y$.

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25 > 0. \quad x_1 = \frac{3-5}{2} = -1 < 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3+5}{2} = 4 > 3.$$

L'équation $\ln(x) + \ln(x-3) = 2 \ln(2)$ admet qu'une seule solution : $x = 4$.

Exercice 5

a. La fonction f est une somme de fonctions définies et dérivables sur $]0; +\infty[$ donc f est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$.

Son premier terme est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = x^2$, de dérivée $u'(x) = 2x$ et $v(x) = \ln(x)$, de dérivée $v'(x) = \frac{1}{x}$.

Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \overbrace{2x}^{u'(x)} \times \overbrace{\ln(x)}^{v(x)} + \overbrace{x^2}^{u(x)} \times \overbrace{\frac{1}{x}}^{v'(x)} + 3 \\ &= 2x \ln x + x + 3 \quad \text{Car } x^2 \times \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x} = x. \\ &= x(2 \ln(x) + 1) + 3 \end{aligned}$$

b. La fonction g est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ car elle est de la forme u^2 avec $u(x) = \ln(x)$ (u est dérivable sur $]0; +\infty[$), de dérivée $u'(x) = \frac{1}{x}$.

$$\text{Pour tout } x > 0, \quad g'(x) = 2u'(x)u(x) = 2 \times \frac{1}{x} \ln(x) = \frac{2 \ln(x)}{x}.$$

c. La fonction h est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient de deux fonctions définies et dérivables sur $]0; +\infty[$ avec un dénominateur non nul sur cet intervalle.

h est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = \ln(x)$, de dérivée $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = x$, de dérivée $v'(x) = 1$.

Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\overbrace{\frac{1}{x}}^{u'(x)} \times \overbrace{x}^{v(x)} - \overbrace{\ln(x)}^{u(x)} \times \overbrace{1}^{v'(x)}}{\underbrace{x^2}_{(v(x))^2}} \\ &= \frac{1 - \ln(x)}{x} \end{aligned}$$

Pensez-y !

$$\frac{1}{x} \times x = \frac{x}{x} = 1.$$

d. La fonction k est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) > 0$ car $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 1 = -8 < 0$.

On en déduit que la fonction k est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad k'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{6x - 2}{3x^2 - 2x + 1}.$$