MATHEMATIQUES
Lois à densité : entraînement 1 (corrigé)

Exercice 1

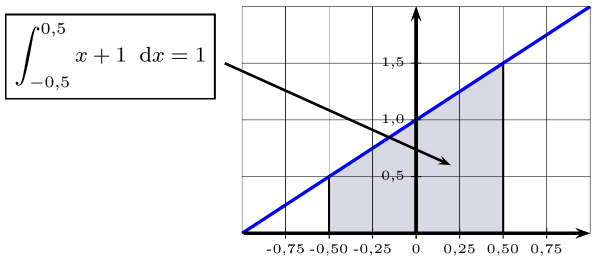
On cherche a de façon que $\displaystyle\int_{-a}^{a} x+1 \ \mathrm{d}x = 1$.

Une primitive F de f est définie par $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + x = 0,5x^2 + x$.

$F(-a) = 0,5 \times (-a)^2 + (-a) = 0,5a^2 - a$.

$F(a) = 0,5 \times a^2 + a = 0,5a^2 + a$.

$\displaystyle\int_{-a}^{a} x+1 \ \mathrm{d}x = F(a) - F(-a) = (0,5a^2 + a) - (0,5a^2 - a) =$
$\cancel{0,5a^2} + a - \cancel{0,5a^2} + a = 2a$.



On cherche donc a de façon que $2a = 1$ soit $a = 0,5$.

La fonction f est bien continue et positive sur $[-0,5\ ;\ 0,5]$ et $\displaystyle\int_{-0,5}^{0,5} x+1 \ \mathrm{d}x = 1$.

Exercice 2

1. La fonction f est continue et positive sur $[0\ ;\ 1]$.

Une primitive F de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2$ est définie par $F(x) = x^3$.

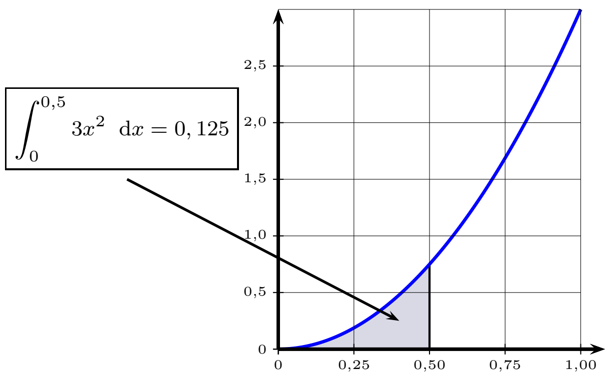
$F(1) = 1^3 = 1$ et $F(0) = 0^3 = 0$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 3x^2 \ \mathrm{d}x = F(1) - F(0) = 1$.

On en déduit que f est bien une fonction de densité sur $[0\ ;\ 1]$.

2.

a. $$\begin{aligned} p\left(X < 0,5\right) &= p\left(0 < X < 0,5\right) \\ &= \int_0^{0,5} f(x)\, dx \\ &= \int_0^{0,5} 3x^2\, dx \\ &= F(0,5) - F(0) \\ &= 0,5^3 - 0^3 \\ &= 0{,}125. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P_{(X<0,5)}(X>0,3) &= \frac{P((X<0,5)\cap(X>0,3))}{P(X<0,5)} \\ &= \frac{P(0,3<X<0,5)}{P(X<0,5)} \end{aligned}$$

Rappels

• $P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$.
• L'événement $((X<0,5)\cap(X>0,3))$ est X est strictement inférieur à 0,5 **et** X est strictement supérieur à 0,3. Cela revient à X est compris entre 0,3 et 0,5.

$P(0,3<X<0,5) = \displaystyle\int_{0,5}^{0,3} 3x^2\,dx = F(0,5) - F(0,3) = 0,5^3 - 0,3^3 = 0,098.$

Ainsi, $P_{(X<0,5)}(X>0,3) = \dfrac{0,098}{0,125} = 0,784.$

b. $$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 3x^3\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Une primitive de $x \longmapsto 3x^3$ est $x \longmapsto 3 \times \dfrac{x^4}{4} = 0,75x^4$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 3x^3\,\mathrm{d}x = 0,75\times 1^4 - 0,75\times 0^4 = 0,75.$

Par conséquent, $E(X) = 0,75$.

Exercice 3

1. On pose $g(x) = \underbrace{0,5}_{u'(x)}\underbrace{\mathrm{e}^{0,5x}}_{\mathrm{e}^{u(x)}}$. On reconnaît la forme $u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = 0,5x$.

Une primitive de la fonction g est la fonction G définie par $G(x) = \mathrm{e}^{0,5x}$.

Rappels

Une primitive de $u'\mathrm{e}^u$ est e^u car $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$.

$G(2) = \mathrm{e}^{0,5\times 2} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}.$
$G(0) = \mathrm{e}^{0,5\times 0} = \mathrm{e}^0 = 1.$

Ainsi, $I = \displaystyle\int_0^2 0,5\mathrm{e}^{0,5x}\,\mathrm{d}x = G(2) - G(0) = \mathrm{e} - 1.$

2. $f(x) = \dfrac{0,5\mathrm{e}^{0,5x}}{\mathrm{e}-1}$.

Sur $[0\ ;\ 2]$, f est continue et positive.

Explication

• $0,5\mathrm{e}^{0,5x} > 0$.
• $\mathrm{e} - 1 > 0$, car $\mathrm{e} \simeq 2,718$.

De plus,

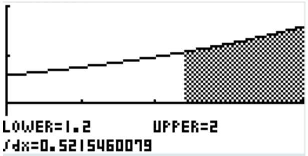
$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{0,5\mathrm{e}^{0,5x}}{\mathrm{e}-1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\mathrm{e}-1}\int_0^2 0,5\mathrm{e}^{0,5x}\,\mathrm{d}x && \text{Car } \int_a^b k\times f\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}-1}\times I && \text{Car } I = \int_0^2 0,5\mathrm{e}^{0,5x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}-1}\times(\mathrm{e}-1) && I = \mathrm{e}-1 \\ &= \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Par conséquent, f est bien une fonction de densité sur $[0\ ;\ 2]$.

3. $P(X \geqslant 1,2) = \displaystyle\int_{1,2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1,2}^{2} \frac{0,5\mathrm{e}^{0,5x}}{\mathrm{e}-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{e}-1}\int_{1,2}^{2} 0,5\mathrm{e}^{0,5x}\,\mathrm{d}x$.

$\displaystyle\int_{1,2}^{2} 0,5\mathrm{e}^{0,5x}\,\mathrm{d}x = G(2) - G(1,2) = \mathrm{e}^{0,5\times 2} - \mathrm{e}^{0,5\times 1,2} = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{0,6}$

Ainsi, $P(X \geqslant 1,2) = \dfrac{1}{\mathrm{e}-1} \times (G(2) - G(1,2)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}-1} \times (F(2) - F(1,2)) = \dfrac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{0,6}}{\mathrm{e}-1} \simeq 0,52 > 0,5$.



Calculatrice

On représente la fonction f en utilisant le menu Graph. On paramètre la fenêtre d'affichage via avec $X_{Min} = 0$, $X_{Max} = 2$, $X_{Scale} = 0,5$ $Y_{Min} = -0,5$, $Y_{Max} = 1$ et $Y_{Scale} = 0,5$.

Avec le solveur graphique Gsolv , puis puis , en tapant 1,2 (Lower Bound) puis puis 2 (Upper Bound) et encore , on obtient la valeur de cette intégrale, ainsi que son interprétation graphique.

Exercice 4

1. • $P(3 \leqslant X \leqslant 7) = \dfrac{7-3}{7-2} = \dfrac{4}{5}$.

• $P(X \geqslant 4) = P(4 \leqslant X \leqslant 7) = \dfrac{7-4}{7-2} = \dfrac{3}{5}$ et $P(2 \leqslant X \leqslant 5) = \dfrac{5-2}{7-2} = \dfrac{3}{5}$.

Par conséquent $P(X \geqslant 4) = P(2 \leqslant X \leqslant 5)$.

• $E(X) = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{2+7}{2} = \dfrac{9}{2} \neq \dfrac{9}{5}$.

Réponse **b.**.

2. Si X est la variable aléatoire donnant un nombre au hasard dans l'intervalle $[4\,;\,11]$; alors
$P(X \leqslant 10) = P(4 \leqslant X \leqslant 10) = \dfrac{10-4}{11-4} = \dfrac{6}{7}$.

Réponse **d.**

3. La probabilité que la traversée entre le continent et l' île de Porquerolles dure au moins 35 minutes est :

$p(D \geqslant 35) = p(35 \leqslant D \leqslant 50) = \dfrac{50-35}{50-30} = \dfrac{15}{20} = 0,75$.

Réponse **d.**