Lycée Louise Michel (Gisors)
Terminale S

MATHEMATIQUES
Lois à densité : entraînement 2

Exercice 1

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.

1. Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$).

Proposition 1 : Le réel a tel que $p(X > a) = p(X \leqslant a)$ est égal à $\dfrac{\ln 2}{\lambda}$.

2. La durée de vie, exprimée en heures, d'un jeu électronique, est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}000\,3$.

Proposition 2 : La probabilité pour que la durée de vie de ce jeu soit strictement supérieure à 2 000 heures est inférieure à $0,5$.

3. On note X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. (λ étant un nombre réel strictement positif).

Proposition 3 : La probabilité de l'évènement $[1 \leqslant X \leqslant 3]$ est égale à : $\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\mathrm{e}^{-3\lambda}}$.

4. On observe la durée de fonctionnement, exprimée en heures, d'un moteur Diesel jusqu'à ce que survienne la première panne. Cette durée de fonctionnement est modélisée par une variable aléatoire X définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}000\,2$. Ainsi, la probabilité que le moteur tombe en panne avant l'instant t est $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$.

Proposition 4 : La probabilité que le moteur fonctionne sans panne pendant plus de 10 000 heures est, au millième près : 0,865.

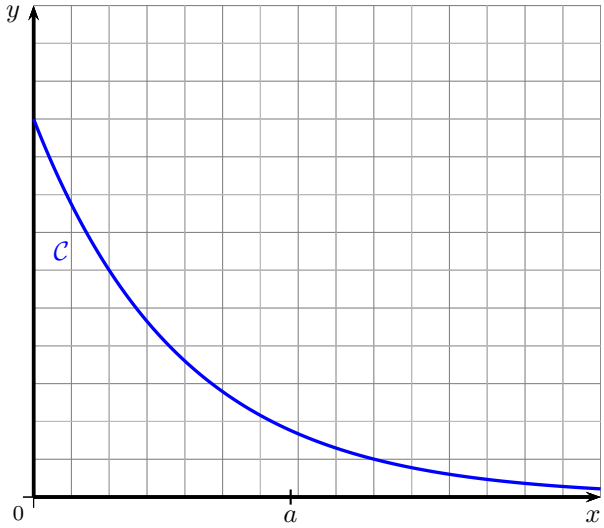
Exercice 2

La durée de vie, en années, d'un composant électronique fabriqué dans une usine est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un nombre réel strictement positif).
On note f la fonction densité associée à la variable aléatoire T. On rappelle que :

— pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

— pour tout nombre réel $a \geqslant 0$, $P(T \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. La courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



a. Interpréter graphiquement $P(T \leqslant a)$ où $a > 0$.

b. Montrer que pour tout nombre réel $t \geqslant 0$: $P(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

c. En déduire que $\lim\limits_{t \to +\infty} P(T \leqslant t) = 1$.

2. On suppose que $P(T \leqslant 7) = 0,5$. Déterminer λ à 10^{-3} près.

3. Dans cette question on prend $\lambda = 0,099$ et on arrondit les résultats des probabilités au centième.

a. On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.
Déterminer la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans.

b. On choisit au hasard un composant parmi ceux qui fonctionnent encore au bout de 2 ans.
Déterminer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans.

c. Donner l'espérance mathématique $\mathrm{E}(T)$ de la variable aléatoire T à l'unité près.
Interpréter ce résultat.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 3

La durée de vie d'un ordinateur (c'est-à-dire la durée de fonctionnement avant la première panne), est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
Ainsi, pour tout réel t positif, la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à t années, notée $p(X \leqslant t)$, est donnée par : $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

1. Déterminer λ sachant que $p(X > 5) = 0,4$.

2. Dans cette question, on prendra $\lambda = 0{,}18$.
Sachant qu'un ordinateur n'a pas eu de panne au cours des 3 premières années, quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 5 ans ?

3. Dans cette question, on admet que la durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres et que $p(X > 5) = 0,4$.

a. On considère un lot de 10 ordinateurs.
Quelle est la probabilité que, dans ce lot, l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans ? On donnera une valeur arrondie au millième de cette probabilité.

b. Quel nombre minimal d'ordinateurs doit-on choisir pour que la probabilité de l'évènement « l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans » soit supérieure à $0,999$?