# MATHEMATIQUES
## Lois à densité : entraînement 2 (corrigé)

# Exercice 1

**1.** Pour tout réel $a > 0$ :

$$p(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^a = 1 - e^{-\lambda a}.$$

**Primitives**

Une primitive de $t \longmapsto \lambda e^{-\lambda t}$ est $t \longmapsto -e^{-\lambda t}$.

De plus, $p(X > a) = 1 - p(X \leqslant a) = 1 - (1 - e^{-\lambda a}) = e^{-\lambda a}$.

**Evénements contraires**

L'événement contraire de $(X \leqslant a)$ est $(X > a)$.

L'équation $p(X > a) = p(X \leqslant a)$ est équivalente à : $1 - e^{-\lambda a} = e^{-\lambda a}$

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\lambda a} = e^{-\lambda a} &\iff e^{-\lambda a} = \frac{1}{2} \\ &\iff -\lambda a = -\ln(2) \\ &\iff a = \frac{\ln(2)}{\lambda} \end{aligned}$$

**La proposition est vraie.**

**2.** On cherche $p(X > 2000)$.

On sait que pour tout $t \geqslant 0$, $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

$$p(X > 2000) = 1 - p(X \leqslant 2000) = 1 - \int_0^{2000} 0,0003 e^{-0,0003x} dx = 1 - \left[-e^{-0,0003x}\right]_0^{2000} = 1 + e^{-0,6} - 1 \simeq 0,549 \geqslant 0,5.$$

**La proposition est fausse.**

**3.** On a $p(1 \leqslant X \leqslant 3) = \displaystyle\int_1^3 \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_1^3 = -e^{-3\lambda} + e^{-\lambda} = e^{-\lambda} - e^{-3\lambda}$.

**Attention**

$\dfrac{e^{-\lambda}}{e^{-3\lambda}}$ n'est pas égale à $e^{-\lambda} - e^{-3\lambda}$.

En effet, $\dfrac{e^{-\lambda}}{e^{-3\lambda}} = e^{-\lambda-(-3\lambda)} = e^{2\lambda}$.

**La proposition est vraie.**

**4.** La probabilité que le moteur fonctionne sans panne pendant plus de 10 000 heures est :

$$p(X > 10\,000) = 1 - p(X \leqslant 10\,000) = 1 - \int_0^{10\,000} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{10\,000} = e^{-0,000\,2 \times 10\,000} = e^{-2} \simeq 0,135.$$

**La proposition est fausse.**

## Exercice 2

1. **a.** $\mathrm{P}(T \leqslant a)$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$.

   **b.** Soit $t \in [0\ ;\ +\infty[$ :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T \leqslant t) &= \int_0^t f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\ &= \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^t \\ &= \left(-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right) - \left(-\mathrm{e}^{-\lambda \times 0}\right) \\ &= \left(-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right) - (-1) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\end{aligned}$$

$$\forall t \in [0, +\infty[ \quad \mathrm{P}(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

   **c.** De $\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{t \to +\infty} -\lambda t \overset{\lambda > 0}{=} -\infty \\ \text{et} \\ \displaystyle\lim_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0\end{array}\right.$ on déduit, par composition : $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} = 0$.

   On a ensuite, par somme : $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} (1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}) = 1 - 0 = 1$ :

$$\lim_{t \to +\infty} \mathrm{P}(T \leqslant t) = 1$$

2. L'hypothèse s'écrit : $1 - \mathrm{e}^{-7\lambda} = 0,5 \quad (1)$

$$\begin{aligned}(1) \quad &\iff \quad \mathrm{e}^{-7\lambda} = 0,5 \\ &\iff \quad -7\lambda = \ln \frac{1}{2} \\ &\iff \quad -7\lambda = -\ln 2 \\ &\iff \quad \lambda = \frac{\ln 2}{7}\end{aligned}$$

Une valeur approchée de $\lambda$, à $10^{-3}$ près, est $0,099$

3. **a.** La question est de déterminer $\mathrm{P}(T \geqslant 5)$.
   Puisque $\mathrm{P}(T \leqslant 5) = 1 - \mathrm{e}^{-0,099 \times 5}$, alors

$$\mathrm{P}(T \geqslant 5) = \mathrm{P}(T > 5) = 1 - \mathrm{P}(T \leqslant 5) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-0,099 \times 5}) = \mathrm{e}^{-5 \times 0,099} = \mathrm{e}^{-0,495}$$

La probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans est environ $0,61$

   **b.** Il s'agit de calculer

$$\mathrm{P}_{(T \geqslant 2)}(T \geqslant 7)$$

   La loi exponentielle étant une loi de durée de vie sans vieillissement, on a

$$\mathrm{P}_{(T \geqslant 2)}(T \geqslant 7) = \mathrm{P}(T \geqslant 5)$$

La probabilité cherchée est environ $0,61$

**c.** $\mathrm{E}(T) = \dfrac{1}{\lambda}$ :

Une valeur approchée de l'espérance de $T$ est environ 10,10 : la durée de vie moyenne d'un composant est d'environ 10 ans

## Exercice 3

**1.** On a :

$$\begin{array}{rcl}
\underbrace{p(X>5)}_{=0,4} & = & 1-p(X\leqslant 5)\\
0,4 & = & 1-p(X\leqslant 5)\\
0,6 & = & p(X\leqslant 5)\\
0,6 & = & \displaystyle\int_0^5 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x\\
0,6 & = & \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^5\\
\mathrm{e}^{-5\lambda} & = & 0,4\\
\mathrm{e}^{-5\lambda} & = & \mathrm{e}^{\ln 0,4}\\
-5\lambda & = & \ln 0,4\\
\lambda & = & \dfrac{\ln 0,4}{-5}
\end{array}$$

Or $\dfrac{\ln 0,4}{-5} \approx 0,183$ à$10^{-3}$ près.

**2.** Il faut calculer : $p_{(X>3)}(X>5) = \dfrac{p(X>5)}{p(X>3)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-5\lambda}}{\mathrm{e}^{-3\lambda}} = \mathrm{e}^{-2\lambda} = \mathrm{e}^{-0,36} \approx 0,698.$

**Durée de vie sans vieillissement**
$p_{(X>3)}(X>5) = p(X>2)$.

**3. a.** On fait 10 fois le même tirage de façon indépendante. Si $Y$ est la variable aléatoire qui compte le nombre d'ordinateurs dont la durée de vie est supérieure à 5 ans, $Y$ suit une loi binomiale de paramètre 10 et $0,4$.

Ainsi, pour $k$ entier compris entre 0 et 10, $p(Y=k) = \dbinom{10}{k} \times 0,4^k \times 0,6^{10-k}$.

La probabilité cherché est :
$p(Y\geqslant 1) = 1-p(Y=0)$.
Comme $p(Y=0) = \underbrace{\dbinom{10}{0}}_{=1} \times \underbrace{0,4^0}_{=1} \times 0,6^{10-0} = 0,6^{10}$,
On obtient : $p(Y\geqslant 1) = 1-(0,6)^{10} \approx 0,994$ à$10^{-3}$ près.

**Contraire de « au moins un »**
Le contraire de « au moins un » est « aucun ».

**b.** Avec $n$ ordinateurs on a à résoudre l'inéquation : $1-0,6^n \geqslant 0,999$

$$\begin{array}{rcl}
1-0,6^n\geqslant 0,999 & \iff & 0,001\geqslant 0,6^n\\
 & \iff & \ln 0,001 \geqslant n\ln 0,6\\
 & \iff & n\geqslant \dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,6}
\end{array}$$

Or $\dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,6} \approx 13,5$.
Le nombre minimal est donc 14 ordinateurs.