Lycée Louise Michel (Gisors)
Terminale S

MATHEMATIQUES
Lois à densité : entraînement savoir-faire (corrigé)

Exercice 1

Méthode

Pour montrer qu'une fonction est une fonction de densité sur un intervalle $[a\,;b]$, il y a trois points à vérifier :
- f est définie et continue sur $[a\,;b]$;
- f est positive sur $[a\,;b]$;
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = 1$

- f est une fonction affine définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0\,;2]$;
- $0 \leqslant x \leqslant 2 \iff 0 \leqslant \dfrac{x}{2} \leqslant 1$, donc f est positive sur $[0\,;2]$.
- $\displaystyle\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{x}{2}\ \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^2 = \frac{2^2}{4} - \frac{0^2}{4} = 1.$

Exercice 2

- f est une fonction trinôme définie et continue sur tout intervalle de $\mathbb{R}$.
  De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3}{4}(1 - x^2)$. f admet (-1) et 1 comme racines et est du signe contraire de $a = -\dfrac{3}{4}$ sur l'intervalle $[-1\,;1]$. Donc f est positive sur $[-1\,;1]$.
  $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{4}(1 - x^2)\right)\ \mathrm{d}x = \frac{3}{4}\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^1 = \frac{3}{4} \times \left(\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1.$

- g est une fonction trigonométrique de référence définie et continue sur $\mathbb{R}$.
  De plus, pour tout $x \in [0\,;\pi]$, $\sin(x) \geqslant 0$.
  $\displaystyle\int_0^\pi g(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{1}{2}\sin(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \times [-\cos(x)]_0^\pi = \frac{1}{2} \times (-\cos(\pi) + \cos(0)) = \frac{-(-1)+1}{2} = 1.$

- h est une fonction du type exponentielle, définie et continue sur $\mathbb{R}$.
  De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$.

  Soit $t > 0$. $\displaystyle\int_0^t h(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^t \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^t = -\mathrm{e}^{-t} - (-\mathrm{e}^0) = -\mathrm{e}^{-t} + 1.$
  Or $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_0^t h(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty} -\mathrm{e}^{-t} + 1 = -0 + 1.$

Attention

Si $\mathrm{I} = [a\,;+\infty[$, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\ \mathrm{d}x = 1.$
De même, si $\mathrm{I} =]-\infty\,;b]$, $\displaystyle\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\ \mathrm{d}x = 1$

Exercice 3

1. a. Calcul des probabilités des événements A et B.

$$\begin{array}{rcl} p(\text{A}) & = & p\left(X \in \left[\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{2\pi}{3}\right]\right) \\ & = & \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{2}\sin(x)\ \text{d}x \\ & = & \frac{1}{2}[-\cos(x)]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} \qquad \text{Car une primitive de } x \longmapsto \sin(x) \text{ est } x \longmapsto -\cos(x). \\ & = & \frac{1}{2}\left(\underbrace{-\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{=\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) \\ & = & \frac{1+\sqrt{3}}{4} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} p(\text{B}) & = & p\left(\frac{\pi}{4} \leqslant X \leqslant \frac{5\pi}{6}\right) \\ & = & \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{1}{2}\sin(x)\ \text{d}x \\ & = & \frac{1}{2}[-\cos(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{6}} \\ & = & \frac{1}{2}\left(-\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ & = & \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4} \end{array}$$

b. $\text{A} \cap \text{B} : \frac{\pi}{4} \leqslant X \leqslant \frac{2\pi}{3}$.

Conseil
Vous pouvez vous aider de petits schémas si besoin.

$$p(\text{A}\cap\text{B}) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{2}\sin(x)\ \text{d}x = \frac{1}{2}[-\cos(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2}\left(-\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1+\sqrt{2}}{4}.$$

$$p_{\text{A}}(\text{B}) = \frac{p(\text{A}\cap\text{B})}{p(\text{A})} = \frac{\frac{1+\sqrt{2}}{4}}{\frac{1+\sqrt{3}}{4}} = \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} \simeq 0,884.$$

2. a. Calcul des probabilités des événements C et D.

$$\begin{array}{rcl} p(\text{C}) & = & p\left(Y \in [0\,;\ln(8)]\right) \\ & = & \displaystyle\int_0^{\ln(8)} \text{e}^{-x}\ \text{d}x \\ & = & \left[-\text{e}^{-x}\right]_0^{\ln(8)} \\ & = & -\text{e}^{-\ln(8)} + \text{e}^{-0} \qquad \text{Car } -\ln(8) = \ln\left(\frac{1}{8}\right). \\ & = & -\text{e}^{\ln\left(\frac{1}{8}\right)} + 1 = \frac{7}{8} = 0,875 \end{array}$$

$$\begin{aligned} p(\mathrm{D}) &= p(\ln(2) \leqslant Y) \\ &= p\left(Y \in [\ln(2)\,;+\infty[\right) \\ &= \lim_{t\to+\infty} \int_{\ln(2)}^{t} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{t\to+\infty} -\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-\ln(2)} \\ &= \frac{1}{2} = 0,5 \end{aligned}$$

b. $\mathrm{C} \cap \mathrm{D} : \ln(2) \leqslant Y \leqslant \ln(8)$.

$p\left(\mathrm{C} \cap \mathrm{D}\right) = \displaystyle\int_{\ln(2)}^{\ln(8)} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-\ln(8)} + \mathrm{e}^{-\ln(2)} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8} = 0,375.$

$p_{\mathrm{D}}(\mathrm{C}) = \dfrac{p(\mathrm{C}\cap\mathrm{D})}{p(\mathrm{D})} = \dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{4} = 0,75.$

Exercice 4

Le cours

Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$, notée $\mathscr{U}[a\ ;\ b]$, lorsque sa densité f est une fonction constante sur $[a\ ;\ b]$.

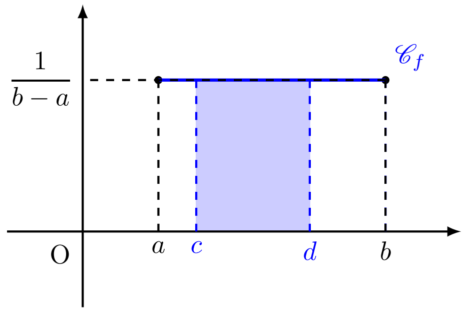
Par conséquent, la fonction de densité f de la loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$ est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

Pour tout intervalle $[c\ ;\ d]$ inclus dans $[a\ ;\ b]$:

$$p\left(X \in [c\ ;\ d]\right) = \frac{d-c}{b-a}$$

L'espérance de X est : $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$



1. $p(\mathrm{A}) = p(T \leqslant 5) = p(2 \leqslant T \leqslant 5) = \dfrac{5-2}{10-2} = \dfrac{3}{8} = 0,375.$

$p(\mathrm{B}) = p(T \geqslant 8) = p(8 \leqslant T \leqslant 10) = \dfrac{10-8}{10-2} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4} = 0,25.$

2. On calcule l'espérance de la variable T : $E(T) = \dfrac{2+10}{2} = 6$ min.

3. a. On cherche la valeur de t telle que $p(T \leqslant t) = 0,95$:

$$\begin{aligned} p(T \leqslant t) = 0,95 &\iff p(2 \leqslant T \leqslant t) = 0,95 \\ &\iff \frac{t-2}{10-2} = 0,95 \\ &\iff t = 0,95 \times 8 + 2 = 9,6 \text{ min, soit 9min et } 36s \end{aligned}$$

b. On cherche la valeur de t telle que $p(T \geqslant t) = 0,75$:

$$\begin{aligned} p(T \geqslant t) = 0,75 &\iff p(t \leqslant T \leqslant 10) = 0,75 \\ &\iff \frac{10-t}{10-2} = 0,75 \\ &\iff 10 - t = 0,75 \times 8 = 6 \\ &\iff t = 10 - 6 = 4 \text{ min} \end{aligned}$$

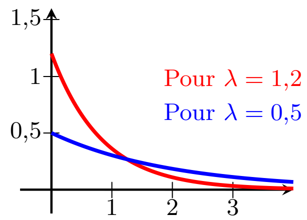
Exercice 5

Le cours

Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ où $\lambda > 0$ si elle admet pour densité la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.
Soient a, c et d trois réels positifs. On a alors :

- $P(c \leqslant X \leqslant d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$
- $P(X \leqslant a) = 1 - e^{-\lambda a}$
- $P(X \geqslant a) = e^{-\lambda a}$

L'espérance d'une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre λ est $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.



1. Soit T la variable aléatoire associée à la durée de vie de l'ampoule :
$p(\text{A}) = p(0 \leqslant T \leqslant 100) = 1 - e^{-0,005\times 100} = 1 - e^{-0,5} \simeq 0,393$.
$p(\text{B}) = p(0 \leqslant T \geqslant 250) = e^{-0,005\times 250} = e^{-1,25} \simeq 0,287$.

2. La durée de vie moyenne d'une ampoule est égale à $E(T) = \dfrac{1}{0,005} = 200$ heures.

3. $p_{T\geqslant 150}(T \geqslant 250) = p_{T\geqslant 150}(T \geqslant 150 + 100) = p(T \geqslant 100) = e^{-0,5} \simeq 0,607$.

Exercice 6

a. La fonction G est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $[0\,;+\infty[$.
Pour tout $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
G'(x) = g(x) &\iff m\,e^{-\lambda x} + (-\lambda)\times(mx+p)e^{-\lambda x} = \lambda\, x\, e^{-\lambda x}\\
&\iff (-\lambda\, m\, x + (m - \lambda\, p))e^{-\lambda x} = (\lambda\, x + 0)e^{-\lambda x}\\
&\iff (-\lambda\, m\, x + (m - \lambda\, p)) = (\lambda\, x + 0)\\
&\iff \begin{cases} -\lambda\, m = \lambda \\ m - \lambda\, p = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} m = -1 \\ p = -\frac{1}{\lambda} \end{cases}
\end{aligned}$$

On obtient ainsi la fonction $G : x \longmapsto \left(-x - \dfrac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x}$ définie sur $[0\,;+\infty[$.

b. $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x \times \lambda e^{-\lambda x}\ dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t g(x)\ dx = \lim_{t\to+\infty} [G(x)]_0^t = \lim_{t\to+\infty} G(t) - G(0)$

Or, par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} G(t) = \lim_{t\to+\infty} \left(-t - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} = 0$ et $G(0) = \left(-0 - \dfrac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\times 0} = -\dfrac{1}{\lambda}$.

D'où $E(X) = 0 - \left(-\dfrac{1}{\lambda}\right) = \dfrac{1}{\lambda}$.