Lycée Louise Michel (Gisors)
Terminale S

MATHEMATIQUES

Lois normales et fluctuation : entraînement 2 (corrigé)

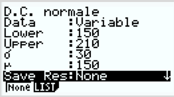
Exercice 1

A. Étude de la zone 1

1. La courbe de densité de probabilité est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$. Par lecture graphique, $\mu = 150$.

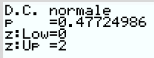
2. À la calculatrice, on trouve $P(150 \leqslant X \leqslant 210) \simeq 0,48$.

Calculatrice

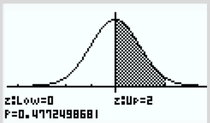
On utilise le menu STAT, puis DIST, NORM et Ncd. On entre les paramètres (Pour Data : Variable, Lower : 150, Upper : 210 , σ : 30 et μ : 150) : 

.

Puis en en descendant avec la flêche de direction ▼, il apparaît à l'écran CALC (en bas à gauche) et DRAW (en bas à droite).

En choisissant, CALC, on obtient : 

puis en revenant sur l'écran précédent avec EXIT et en sélectionnant DRAW, on obtient :

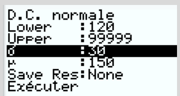


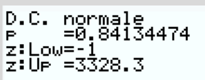
Les valeurs de z :Low et z :Up correspondent aux valeurs centrées réduites. En effet si X suit une loi normale $(\mu\ ;\ \sigma^2)$, alors $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite : $\dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{150-150}{30} = 0$ et $\dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{210-150}{30} = 2$.

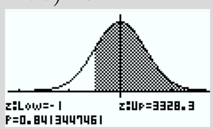
3. À la calculatrice, on trouve $P(X \geqslant 120) \simeq 0,84$.

Calculatrice

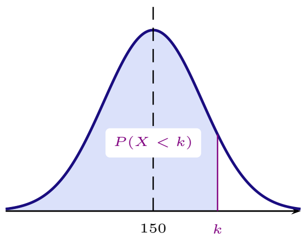
On entre les paramètres (Pour Data : Variable, Lower : 120, Upper : 999999 , σ : 30 et μ :150). On obtient :







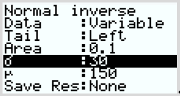
4. Non ; en effet, la courbe étant symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$, $P(X \leqslant \mu) = 0,5$.
Ainsi, si $k > \mu$, $P(X < k) = P(X \leqslant \mu) + P(\mu < X < k)$ avec $P(\mu < X < k) > 0$.
Finalement, si $k > \mu$, $P(X < k) > 0,5$.



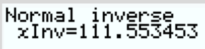
5. Pour déterminer la taille t maximale des 10 % des poissons les plus petits, revient à chercher t tel que $P(X \leqslant t) = 0,1$.

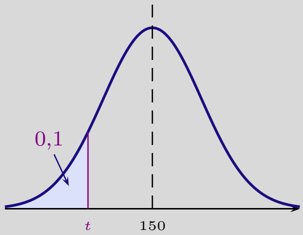
À la calculatrice, on trouve $t \simeq 112$.

Calculatrice

On utilise le menu STAT, puis DIST, NORM et InvN. On entre les paramètres (Pour Data : Variable, Tail : Left (car on cherche $P\left(X \leqslant t\right)$), Area : 0,1 , σ : 30 et μ :150) : 

.
Puis en appuyant sur EXE on obtient :





La taille maximale des 10 % des poissons les petits est 112 cm.

B. Étude de la zone 2

1. a. $f = \dfrac{15}{50} = \dfrac{3}{10} = 0,3$.

b. $I = \left[f - \dfrac{1}{\sqrt{50}}\ ;\ f + \dfrac{1}{\sqrt{50}}\right] = [0,159\ ;\ 0,441]$.

2. La courbe de la fonction de densité est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 205$, ce qui exclut la courbe 3.
De plus $\sigma' > \sigma$, ce qui signifie que les valeurs sont plus dispersées. La courbe représentant la densité de probabilité de la variable aléatoire Y est donc la courbe 1.

Exercice 2

1. X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(0,17\ ;\ 0,006^2\right)$.
En utilisant la calculatrice, on trouve $P(0,16 \leqslant X \leqslant 0,18) \simeq 0{,}904\,4$.

2. a. D'après le cours, comme Y suit une loi normale $\mathcal{N}\left(m_2\ ;\ \sigma_2^2\right)$, alors $Z = \dfrac{Y - m_2}{\sigma_2}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,,1)$.

b.

$$0,16 \leqslant Y \leqslant 0,18 \Longleftrightarrow \frac{0,16 - 0,17}{\sigma_2} \leqslant \frac{Y - 0,17}{\sigma_2} \leqslant \frac{0,18 - 0,17}{\sigma_2}$$

soit
$$-\frac{0,01}{\sigma_2} \leqslant Z \leqslant \frac{0,01}{\sigma_2}$$

Donc lorsque Y appartient à l'intervalle $[0,16\ ;\ 0,18]$, alors Z appartient à l'intervalle $\left[-\dfrac{0,01}{\sigma_2}\ ;\ \dfrac{0,01}{\sigma_2}\right]$.

c. On sait que cette probabilité doit être égale à 0,990. On a donc :
$P(0,16 \leqslant Y \leqslant 0,18) = P\left(-\dfrac{0,01}{\sigma_2} \leqslant Z \leqslant \dfrac{0,01}{\sigma_2}\right) = 0,990.$

En utilisant la calculatrice (InvNorm), on obtient $\dfrac{0,01}{\sigma_2} = 2,5758.$

d'où $\sigma_2 = 0{,}003\,85$

En conclusion, à 10^{-3} près, $\sigma \approx 0,004$.

Exercice 3

1. a. On a observé que 78 copies ont obtenu une note supérieure ou égale à 10, donc la proportion de copies de l'échantillon ayant obtenu une note supérieure ou égale à 10 est : $f = \dfrac{78}{160} = 0{,}487\,5$.

   b. Un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % de la proportion des copies qui obtiendront une note supérieure ou égale à 10 dans l'ensemble des copies est donné par $I_n = \left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ où n est la taille de l'échantillon et f la fréquence observée dans cet échantillon.
   $I_n = \left[0{,}487\,5 - \dfrac{1}{\sqrt{160}}\,;\, 0{,}487\,5 + \dfrac{1}{\sqrt{160}}\right] \approx \left[0{,}408\,4\,;\, 0{,}566\,6\right]$

   c. L'amplitude de l'intervalle I_n est $f + \dfrac{1}{\sqrt{n}} - (f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}) = \dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

   Pour que cette amplitude soit inférieure à 0,04 il faut déterminer n tel que $\dfrac{2}{\sqrt{n}} < 0,04$.

   On résout cette inéquation :

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{2}{\sqrt{n}} & < & 0,04 \\
2 & < & 0,04 \times \sqrt{n} \quad \text{en multipliant par } \sqrt{n} > 0 \text{ dans chaque membre.} \\
\dfrac{2}{0,04} & < & \sqrt{n} \quad \text{En divisant par 0,04.} \\
50 & < & \sqrt{n} \\
2\,500 & < & n \quad \text{En élevant au carré. On ne change pas le sens de l'inégalité car les nombres sont positifs.}
\end{array}$$

   Il faut donc que l'échantillon ait une taille supérieure à 2 500 pour que l'intervalle de confiance au seuil 95 % ait une amplitude inférieure à 0,04.

2. On sait que si une variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ, alors :

$$P(X \in [\mu - 2\sigma\,;\, \mu + 2\sigma]) \approx 0,95$$

   Ici $\mu = 10,5$ et $\sigma = 2$, donc l'intervalle $[10,5 - 4\,;\, 10,5 + 4] = [6,5\,;\, 14,5]$ devrait contenir à peu près 95 % des notes des candidats.

3. La calculatrice donne directement $P(X > 12) \approx 0{,}226\,6$.

4. Le graphique fourni a une allure générale de « courbe en cloche » qui représente une loi normale.
   On peut voir que la note $9,5$ est sous-représentée : cela correspond au fait que les jurys ont accordé quelques points aux candidats qui avaient un bon livret scolaire pour qu'ils atteignent la moyenne de 10.
   On peut également constater que la note 8 est sur-représentée ; sans doute y a-t-il eu un « coup de pouce » des jurys pour que certaines moyennes qui étaient en dessous de 8 passent à 8 pour que les candidats ayant travaillé régulièrement dans l'année puissent se présenter au second groupe d'épreuves.
   De même les notes 12, 14 et 16 ont l'air un peu sur-représentées, sans doute pour accorder des mentions aux candidats méritants à qui il ne manquait que quelques points.