Lycée Louise Michel (Gisors)
Terminale S

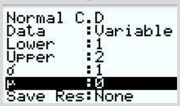
MATHEMATIQUES
Lois normales et fluctuation : entraînement savoir-faire 1 (corrigé)

Exercice 1

1. On trouve à l'aide de la calculatrice :

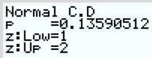
$$p(1 \leqslant X \leqslant 2) \simeq 0,136 \quad ; \quad p(X \leqslant 1,5) \simeq 0,933 \quad ; \quad p(X \geqslant -0,5) \simeq 0,691$$

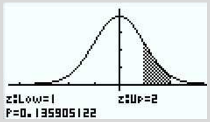
Calculatrice

On utilise le menu STAT, puis DIST, NORM et Ncd. On entre les paramètres (Pour Data : Variable, Lower : 1, Upper : 2, σ : 1 et μ : 0) : 

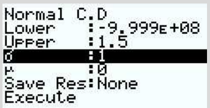
.

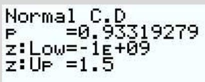
Puis en en descendant avec la flèche de direction , il apparaît à l'écran CALC (en bas à gauche) et DRAW (en bas à droite).

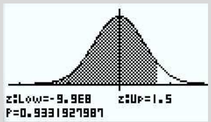
En choisissant, CALC, on obtient : 

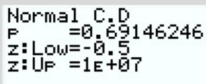
puis en revenant sur l'écran précédent avec EXIT et en sélectionnant DRAW, on obtient : 

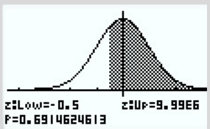
Pour les deux autres probabilités :







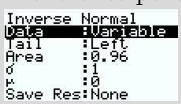




2. On trouve à l'aide de la calculatrice :

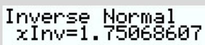
$$p(X \leqslant u) = 0,96 \text{ pour } u \simeq 1,751 \quad ; \quad p(X \geqslant u) = 0,185 \text{ pour } u \simeq 0,896 \quad ; \quad p(-u \leqslant X \leqslant u) \text{ pour } u \simeq 1,405$$

Calculatrice

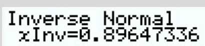
On utilise le menu STAT, puis DIST, NORM et InvN. On entre les paramètres (Pour Data : Variable, Tail : Left (car on cherche $P(X \leqslant u)$), Area : 0,96 , σ : 1 et μ : 0) : 

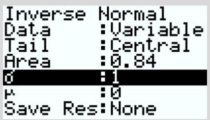
.

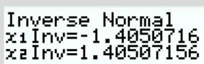
Puis en appuyant sur EXE on obtient :



Pour les deux autres valeurs de u :







Exercice 2

a. $p(\mu \leqslant X \leqslant \mu + a) = 0,5 - 0,16 = 0,34$

b. $p(X \leqslant \mu + a) = 0,5 + 0,34 = 0,84$

ou

$p(X \leqslant \mu+a) = 1 - P(X > \mu+a) = 1 - 0,16 = 0,84.$

c. $p(\mu - a \leqslant X \leqslant \mu + a) = 2 \times 0,34 = 0,68$

Exercice 3

Soit T la variable aléatoire correspondant à la température relevée un jour de juillet autour du lac Léman.
T suit la loi normale $\mathcal{N}(18{,}2\,;3{,}6^2)$.

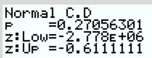
1. a. $p(T \leqslant 16) \simeq 0,271$.

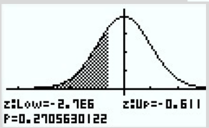
Calculatrice

On utilise le menu STAT, puis DIST, NORM et Ncd. On entre les paramètres (Pour Data : Variable, Lower : -9999999, Upper : 16 , σ : 3,6 et μ : 18,2) : 

.

Puis en en descendant avec la flèche de direction, il apparaît à l'écran CALC (en bas à gauche) et DRAW (en bas à droite).

En choisissant, CALC, on obtient : 

puis en revenant sur l'écran précédent avec EXIT et en sélectionnant DRAW, on obtient : 

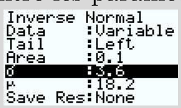
Les valeurs de z :Low et z :Up correspondent aux valeurs centrées réduites. En effet si T suit une loi normale $(\mu\ ;\ \sigma^2)$, alors $\dfrac{T-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite :
z :up $= \dfrac{T-\mu}{\sigma} = \dfrac{16-18,2}{5} \simeq -0,611$ et z :low $= \dfrac{T-\mu}{\sigma} = \dfrac{-999999-18,2}{5} \simeq -2700000$

b. $p(20 \leqslant T \leqslant 24,5) \simeq 0,268$

c. $p(T \geqslant 21) \simeq 0,218$

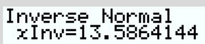
2. a. On cherche la température T_{MAX} telle que $p(T \leqslant T_{\text{MAX}}) = 0,1$. On trouve $T_{\text{MAX}} \simeq 13,6$°C.

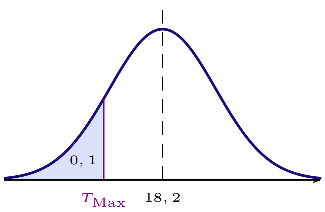
Calculatrice

On utilise le menu STAT, puis DIST, NORM et InvN. On entre les paramètres (Pour Data : Variable, Tail : Left (car on cherche $P(T < t)$), Area : 0,1 , σ : 3,6 et μ :4 18,2) : 

.

Puis en appuyant sur EXE on obtient :

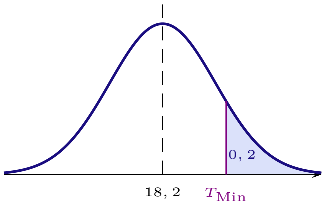




Conseil

Visualisez graphiquement la situation.

b. On cherche la température T_{MIN} telle que $p(T \geqslant T_{\text{MIN}}) = 0,2$. On trouve $T_{\text{MIN}} \simeq 21,2$°C.



Conseil

Visualisez graphiquement la situation.

Exercice 4

1. On considère la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$.

a. X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma)$ donc la variable aléatoire Z centrée réduite associée à X suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

b. $p(Z \geqslant t) = 0,3085$ pour $t \simeq 0,5$.

Explications

$X \geqslant 14 \iff X-\mu \geqslant 14-\mu \iff \underbrace{\dfrac{X-\mu}{\sigma}}_{=Z} \geqslant \dfrac{14-\mu}{\sigma}$.

c. $p(X \geqslant 14) = 0,3085 \iff p(Z \geqslant \dfrac{14-\mu}{\sigma}) = 0,3085$.

En posant $t = \dfrac{14-\mu}{\sigma}$, on trouve d'après la question précédente :

$\dfrac{14-\mu}{\sigma} = 0,5 \iff 14-\mu = 0,5\sigma \iff 0,5\sigma + \mu = 14$.

2. a. $p(Z \leqslant t') = 0,1356$ pour $t' \simeq -1,1$.

b. $p(X \leqslant 8) = 0,1356 \iff p(Z \leqslant \dfrac{8-\mu}{\sigma}) = 0,1356$.

En posant $t' = \dfrac{8-\mu}{\sigma}$, on trouve d'après la question précédente :

$\dfrac{8-\mu}{\sigma} = -1,1 \iff 8-\mu = -1,1\sigma \iff -1,1\sigma + \mu = 8$.

3. Les paramètres μ et σ vérifient le système d'équations : $\begin{cases} 0,5\sigma + \mu = 14 \\ -1,1\sigma + \mu = 8 \end{cases}$

$$\begin{cases} 0,5\sigma + \mu = 14 \\ -1,1\sigma + \mu = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} 0,5\sigma + \mu = 14 \\ 1,6\sigma = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} \sigma = \frac{6}{1,6} = 3,75 \\ \mu = 14 - 0,5 \times 3,75 = 12,125 \end{cases}$$

On en déduit X suit la loi normale $\mathcal{N}(12,125\,;3,75)$.

Exercice 5

Le calibre recherché est l'intervalle 2σ car $p(X \in [\mu - 2\sigma\ ;\ \mu + 2\sigma]) \simeq 0{,}954$.
Ici, $\mu - 2\sigma = 150 - 2 \times 12 = 126$ et $\mu + 2\sigma = 150 + 2 \times 12 = 174$.
Le maraîcher pourra commercialiser toutes les pommes dont le poids est compris entre 126 g et 174 g.