Lycée Louise Michel (Gisors)
Terminale S

MATHEMATIQUES

Lois normales et fluctuation : entraînement savoir-faire 2 (corrigé)

Exercice 1

a. L'expérience qui consiste à choisir une personne au hasard et à considérer la réalisation ou la non réalisation de l'événement S : « On obtient une fille », constitue une expérience de Bernoulli de paramètre :

$$p = P(S) = \frac{203\,840}{364\,000} = 0{,}56$$

Choisir 35 personnes au hasard et de manière indépendantes constitue un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 35$ et $p = 0{,}56$
X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(35\,;0{,}56)$.

b. On vérifie que les trois conditions soient vérifiées :
$n \geqslant 30$, $\quad n \times p = 35 \times 0{,}56 = 19{,}6 \geqslant 5 \quad$ et $\quad n \times (1-p) = 35 \times 0{,}44 = 15{,}4 \geqslant 5$. D'où :

Au seuil de 95 % : $I_{35} = \left[0{,}56 - 1,96\frac{\sqrt{0{,}56 \times 0{,}44}}{\sqrt{35}}\,;0{,}56 + 1,96\frac{\sqrt{0{,}56 \times 0{,}44}}{\sqrt{35}}\right] = [0{,}396\,;0{,}724]$ à 10^{-3} près

Au seuil de 99 % : $I_{35} = \left[0{,}56 - 2,58\frac{\sqrt{0{,}56 \times 0{,}44}}{\sqrt{35}}\,;0{,}56 + 2,58\frac{\sqrt{0{,}56 \times 0{,}44}}{\sqrt{35}}\right] = [0{,}344\,;0{,}777]$ à 10^{-3} près

c. $F_{35} = \frac{14}{35} = 0{,}4$. La proportion de filles dans cette classe est 0,4.

$0,4 \in [0{,}396\,;0{,}724]$ et $0,4 \in [0{,}344\,;0{,}777]$.

On ne peut donc pas affirmer qu'il y a une sous représentation de filles dans cette classe.

Exercice 2

L'hypothèse à tester est : « 75 % des habitants de la région soit favorables à la construction de l'autoroute ».
Donc $p = 0{,}75$.

Or, $n = 900 \geqslant 30$, $np = 900 \times 0{,}75 = 675 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 900 \times 0{,}25 = 225 \geqslant 5$.

On peut alors déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % pour un échantillon de taille $n = 900$:

$$I_{900} = \left[0,75 - 1,96\frac{\sqrt{0,75 \times 0,25}}{\sqrt{900}}\,;0,75 + 1,96\frac{\sqrt{0,75 \times 0,25}}{\sqrt{900}}\right] = [0{,}721\,;0,779] \quad \text{à } 10^{-3} \text{ près}$$

Or $f = \frac{550}{900} = 0{,}611$ et donc $f \notin I_{900}$.
On peut donc rejeter, avec une erreur inférieure à 5 % l'hypothèse que 75 % des habitants de la région soit favorables à la construction de l'autoroute.

Exercice 3

a. On commence par calculer la fréquence observée f :
$f = \dfrac{241}{500} = 0{,}482$.
On vérifie que les trois conditions de validité sont réunie : $n = 500 \geqslant 30$, $nf = 500 \times 0,482 = 241 \geqslant 5$ et $n(1-f) = 259 \geqslant 5$.
L'intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % est :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,482 - \frac{1}{\sqrt{500}}\,;0,482 + \frac{1}{\sqrt{500}}\right] = [0,437\,;0,527] \quad \text{à } 10^{-3} \text{ près}$$

b. L'intervalle $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ a pour amplitude $\left(f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) - \left(f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

Pour que cette amplitude soit inférieure à 0,01 il faut déterminer n tel que $\dfrac{2}{\sqrt{n}} < 0,01$.

On résout cette inéquation :

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{n}} &< 0,01 \\
2 &< 0,01 \times \sqrt{n} \quad \text{en multipliant par } \sqrt{n} > 0 \text{ dans chaque membre.} \\
\frac{2}{0,01} &< \sqrt{n} \quad \text{En divisant par 0,04.} \\
200 &< \sqrt{n} \\
40\,000 &< n \quad \text{En élevant au carré. On ne change pas le sens de l'inégalité car les nombres sont positifs.}
\end{aligned}$$

Il faut donc que l'échantillon ait une taille supérieure à 2 500 pour que l'intervalle de confiance au seuil 95 % ait une amplitude inférieure à 0,04.

Exercice 4

Pour tout réel $u \geqslant 0$, $p(-u \leqslant X \leqslant u) = 2p(0 \leqslant X \leqslant u) = 2 \times \displaystyle\int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x = 2F(u)$ avec F la primitive de f sur $[0\,;+\infty[$ qui s'annule en 0.

- La fonction $2F$ est continue sur $[0\,;+\infty[$.
- La fonction $2F$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ car $f(u) > 0$ sur $[0\,;+\infty[$.
- $2F(0) = 0$ et $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} 2F(u) = 2 \lim_{u\to+\infty} F(u) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$.

Or, pour tout $\alpha \in\,]0\,;1[$, $1-\alpha \in\,]0\,;1[$ et donc $1-\alpha$ est bien une valeur intermédiaire entre 0 et $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} 2F(u) = 1$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $u_\alpha \geqslant 0$ tel que $2F(u_\alpha) = 1-\alpha$, soit $p(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$.

Exercice 5

Posons $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.
D'après le théorème de Moivre - Laplace, pour tous réels a et b tels que $a \leqslant b$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(a \leqslant Z_n \leqslant b\right) = P\left(a \leqslant Z \leqslant b\right)$$

Or, pour tout nombre réel $\alpha \in\,]0\,;1[$, il existe un unique $u_\alpha \geqslant 0$ tel que $P\left(-u_\alpha \leqslant Z \leqslant u_\alpha\right) = 1-\alpha$.
On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} p\left(-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha\right) = 1-\alpha$$

Or

$$\begin{aligned}
-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha &\iff -u_\alpha \leqslant \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant u_\alpha \\
&\iff -u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \leqslant X_n - np \leqslant u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \\
&\iff np - u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \leqslant X_n \leqslant np + u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \\
&\iff p - u_\alpha\sqrt{\frac{np(1-p)}{n^2}} \leqslant \frac{X_n}{n} \leqslant p + u_\alpha\sqrt{\frac{np(1-p)}{n^2}} \\
&\iff p - u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

D'où

$$P(-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha) = p(F_n \in I_n)$$

On a donc bien :

$$\lim_{n\to+\infty} p\left(F_n \in I_n\right) = 1 - \alpha$$