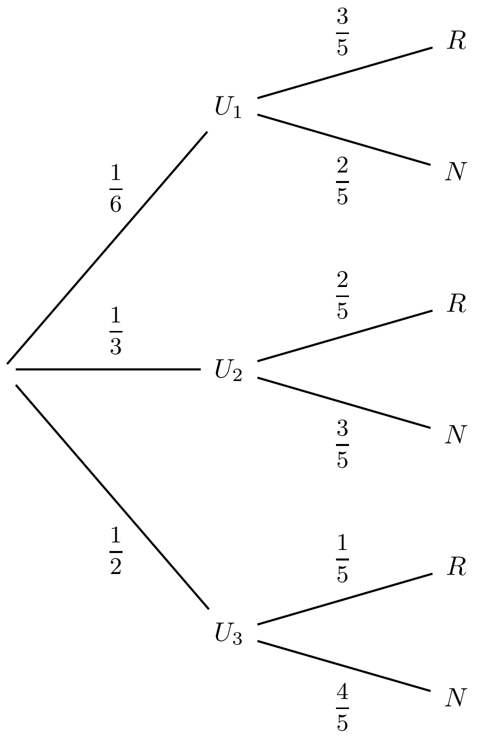
MATHEMATIQUES

Probabilités conditionnelles - Indépendance : corrigé entraînement (1)

Exercice 1

1. Illustrons cette situation par un arbre pondéré où U_k ($k \in \{1, 2, 3\}$), et R désignent respectivement les événements : « la boule est extraite de l'urne k »
et « la boule obtenue est rouge ». :



Conseil

Même si l'énoncé ne le précise pas, faites un arbre pour représenter la situation..... on y voit plus clair avec !

La probabilité cherchée est $P(R \cap U_1)$.

Remarque

$R \cap U_1$ est représenté par la branche (le chemin) supérieure de l'arbre. La probabilité est obtenu par le produit des probabilités inscrites sur chacune des branches.

On a : $P(R \cap U_1) = P(U_1) \times P_{U_1}(R)$ et donc $P(R \cap U_1) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{10}$.

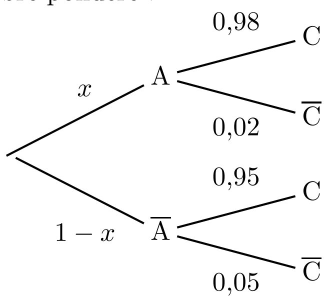
2. Les événements U_1, U_2 et U_3 représentent une partition de Ω.
On a alors d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(R) &= P(R \cap U_1) + P(R \cap U_2) + P(R \cap U_3) \\
&= P_{U_1}(R) \times P(U_1) + P_{U_2}(R) \times P(U_2) + P_{U_3}(R) \times P(U_3) \\
&= \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Exercice 2

1. L'énoncé donne $P(A) = x$, $P_A(C) = 0,98$ et $P_{\overline{A}}(C) = 0,95$.

On représente donc la situation par l'arbre pondéré :



A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers donc d'après les probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C\cap A) + P\left(C\cap \overline{A}\right) \\ &= P_A(C)\times P(A) + P_{\overline{A}}(C)\times P\left(\overline{A}\right) \\ &= 0,98x + 0,95(1-x) \\ &= 0,03x + 0,95 \end{aligned}$$

2. $P(C) = 0,96 \iff 0,03x + 0,95 = 0,96 \iff x = \dfrac{1}{3}$

Donc $P(A) = \dfrac{1}{3}$ et $P(B) = P\left(\overline{A}\right) = \dfrac{2}{3}$

La probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est donc bien égale au double de celle que la tablette provienne de la chaîne A.

Exercice 3

1. Il y a $60 - (25 + 8 + 15) = 60 - 48 = 12$ cadres hommes, donc 20 cadres en tout dont 8 femmes.

La probabilité est donc égale à $\dfrac{8}{20} = \dfrac{4}{10} = 0,4 = \dfrac{2}{5}$.

Explication

C'est une probabilité conditionnelle qui est demandée ici. Pour déterminer cette probabilité, on utilise la formule : $p_C(F) = \dfrac{\text{Nombre de femmes cadres}}{\text{Nombre de cadres}}$.

2. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$P(G) = P(A\cap G) + P(B\cap G) = 0,35\times 0,3 + 0,65\times x = 0,105 + 0,65x$.

A et G étant indépendants, on a : $P(A\cap G) = P(A)\times P(G)$.

Méthode

On calcule d'une part $P(A\cap G)$ et d'autre part $P(A)\times P(G)$. C'est l'égalité de ces deux probabilités qui permet d'obtenir la valeur de x.

$$\begin{aligned} P(A\cap G) &= P(A)\times P(G) \\ 0,35\times 0,3 &= 0,35\times(0,105 + 0,65x) \\ 0,105 &= 0,036\,75 + 0,227\,5x \\ 0,227\,5x &= 0,068\,25 \\ x &= \frac{0,068\,25}{0,227\,5} = 0,3 \end{aligned}$$

3. C et D étant indépendants, on a $p(C\cap D)=p(C)\times p(D)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{36}$.

D'où :

$p(C\cup D)=p(C)+p(D)-p(C\cap D)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{36}=\dfrac{12+3-1}{36}=\dfrac{14}{36}=\dfrac{7}{18}$.

Rappel

Soit A et B deux événements, on a :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

4. Cette expérience est la répétition de 4 fois la même épreuve de Bernoulli (lancer d'une pièce de monnaie). Le succès est "obtenir pile", dont la probabilité est $\dfrac{1}{2}$. Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli et la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès parmi les 4 répétition suit une loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p=\dfrac{1}{2}$.

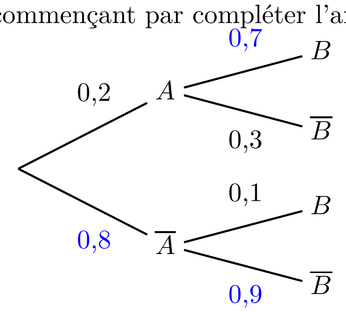
La probabilité d'obtenir 0 fois pile est $P(X=0)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{1}{16}$.

Donc la probabilité d'obtenir au moins une fois pile est : $1-\dfrac{1}{16}=\dfrac{15}{16}$.

Pensez-y !

Passez par l'événement contraire ! Le contraire de "au moins un" est "aucun". La probabilité de l'événement "obtenir aucun pile" est la probabilité de l'événement "obtenir 4 faces". Il n'y a qu'une issue qui compte 0 succès, c'est l'issue $\overline{SSSS}$ dont la probabilité est $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$.

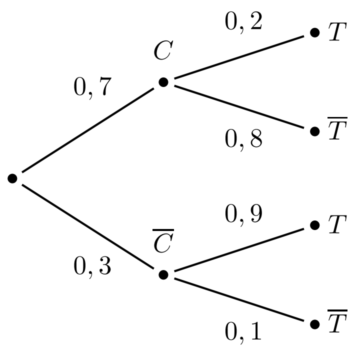
5. On teste chacune des propositions en commençant par compléter l'arbre pondéré :



- $p(B)=p(A\cap B)+p\left(\overline{A}\cap B\right)=0,2\times 0,7+0,8\times 0,1=0,14+0,08=0,22$.
- $p\left(\overline{A}\cap B\right)=0,8\times 0,1=0,08$.
- $p_B(A)=\dfrac{p(B\cap A}{p(B)}=\dfrac{0,2\times 0,7}{0,22}=\dfrac{0,14}{0,22}=\dfrac{14}{22}=\dfrac{7}{11}$.

Exercice 4

1. A l'aide des données du texte, on obtient l'arbre suivant :



2. On cherche $P(C\cap T)$.
$P(C\cap T)=p(C)\times p_C(T)=0,7\times 0,2=0,14$

Conseils

On cherche la probabilité que le terrain soit occupé **et** que l'heure soit creuse. C'est donc la probabilité d'une intersection que l'on cherche : $p(C\underbrace{\cap}_{\text{et}}T)$

3. C et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers, donc d'après les probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(T) &= P(C \cap T) + P\left(\overline{C} \cap T\right) \\ &= 0,14 + 0,3 \times 0,9 \\ &= 0,41 \end{aligned}$$

4. On cherche $P_T\left(\overline{C}\right)$.

$$P_T\left(\overline{C}\right) = \frac{P\left(T \cap \overline{C}\right)}{P(T)} = \frac{0,3 \times 0,9}{0,41} = \frac{27}{41}$$

Conseil

Identifiez bien la probabilité qu'il faut calculer. Ici c'est une probabilité conditionnelle (qui n'est pas inscrite sur une branche de l'arbre). On utilise donc la formule.

5. Puisque X prend 3 valeurs (0,6 et 10), on calcule les trois probabilités $p(X=0)$, $p(X=6)$ et $p(X=10)$.

• L'événement $(X=0)$ est l'événement "la recette est nulle". La recette est nulle lorsque le terrain n'est pas occupé. On en déduit :
$p(X=0) = 1 - p(T) = 1 - 0,41 = 0,59$.

• L'événement $(X=6)$ est l'événement "la recette est de 6 €". La recette est de 6 € lorsque le terrain est occupé et loué en heure creuse. On en déduit :
$p(X=6) = p(C \cap T) = 0,2 \times 0,7 = 0,14$.

• L'événement $(X=10)$ est l'événement "la recette est de 10 €". La recette est de 10 € lorsque le terrain est occupé et loué en heure pleine. On en déduit :
$p(X=10) = p(T \cap \overline{C}) = 0,3 \times 0,9 = 0,27$.

On obtient le tableau de la loi de probabilité de X :

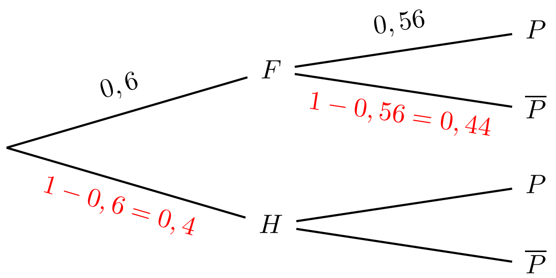
x_i	0	6	10
$P(X=x_i)$	$0,59$	0,14	$0,27$

Pensez-y !

• Sur la première ligne du tableau on inscrit les valeurs que peut prendre la variable aléatoire et sur la deuxième ligne les probabilités correspondantes.
• La somme des probabilités doit faire 1.

Exercice 5

On regroupe les données du texte dans un arbre pondéré :



Conseils

36 % de la population travaillent à temps partiel est la probabilité de l'événement P. Celle-ci ne doit pas apparaître sur une branche de l'arbre. Ecrivez-là dans un petit coin (cela montrera que vous avez bien interprété les données de l'énoncé.... c'est déjà ça :-).

On a aussi d'après le texte, $p(P) = 0,36$.
On cherche à déterminer la probabilité que la personne interrogée soit un homme, c'est à dire :

$$p_P(H) = \frac{p(P \cap H)}{p(P)}.$$

Conseils

Pour bien commencer, écrivez la probabilité que l'on vous demande de calculer et regardez ce qu'il vous manque pour la déterminer.

Dans cette formule, on connaît $p(P) = 0,36$ mais il nous manque $p(P \cap H)$.

D'après la formule des probabilités totales (F et H forment une partition de l'univers) :

$p(P) = p(F \cap P) + p(H \cap P) = p(F) \times p_F(P) + p(H \cap P)$.

Pensez-y !

Pour calculer la probabilité manquante, vous devez penser à la formule des probabilités totales (avec un soupçon d'initiative ...)

$$\begin{aligned} 0,36 &= 0,6 \times 0,56 + p(H \cap P) \\ 0,36 &= 0,336 + p(H \cap P) \\ 0,36 - 0,336 &= p(H \cap P) \\ p(H \cap P) &= 0,024 \end{aligned}$$

Ainsi : $p_P(H) = \dfrac{p(P \cap H)}{p(P)} = \dfrac{0,024}{0,36} = \dfrac{1}{15}$