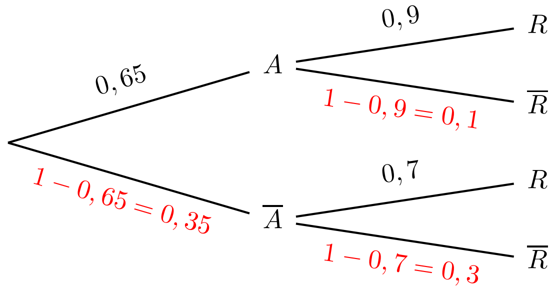
Lycée Louise Michel (Gisors)
Terminale S

MATHEMATIQUES
Probabilités conditionnelles - Indépendance : corrigé entraînement (2)

Exercice 1

1. On traduit cette situation par un arbre pondéré :



2. a. L'événement « faire l'aller-retour en bateau » est l'événement $A \cap R$.
D'après l'arbre : $p(A \cap R) = p(A) \times p_A(R) = 0,65 \times 0,9 = 0,585$.

b. L'agence annonce que $p(R) = 0,83$. On calcule $p(R)$ grâce à la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(R) &= p(A \cap R) + p(\overline{A} \cap R) \\ &= 0,585 + 0,35 \times 0,7 \\ &= 0,83 \end{aligned}$$

Ainsi, il y a bien 83 % des clients qui prennent le bateau au retour. L'agence a raison.

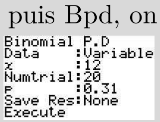
c. Le client utilise les deux moyens de transport dans les événements $A \cap \overline{R}$ (aller en bateau et retour en train) et $\overline{A} \cap R$ (aller en train et retour en bateau).
Ces deux événement sont disjoints donc :
$p\left(A \cap \overline{R} \cup \overline{A} \cap R\right) = p\left(A \cap \overline{R}\right) + p\left(\overline{A} \cap R\right) = 0,65 \times 0,1 + 0,35 \times 0,7 = 0,31$.

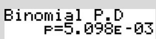
3. a. On répète 20 fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli (choix d'une personne au hasard). Le succès est "la personne utilise les deux moyens de transport différents". Sa probabilité est $p = 0,31$.
X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès parmi les 20 répétitions, donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,31$.

b. La probabilité qu'exactement 12 clients utilisent les deux moyens de transport différents est :
$p(X = 12) = \binom{20}{12} \times 0,31^{12} \times (1 - 0,31)^{20-12} \approx 0,005$.

Calculatrice

Dans le menu STAT, puis DIST, puis BINM, puis Bpd, on entre les données :



On obtient : 

.

c. La probabilité qu'il y ait au moins 2 clients qui utilisent les deux moyens de transport différents est :

$$\begin{aligned} p(X \geqslant 2) &= 1 - \Big[p(X = 0) + p(X = 1)\Big] \\ &\simeq 1 - [0{,}000\,6 + 0{,}005\,4] \\ &\simeq 1 - 0,006 \\ &\simeq 0,994 \end{aligned}$$

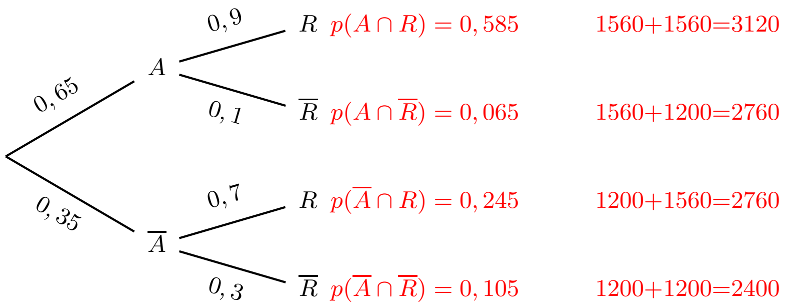
Explications

Il faut absolument penser à calculer la probabilité de l'événement contraire de "au moins 2 clients".
On a $p(X \geqslant 2) = p(X = 2) + p(X = 3) + ... + p(X = 20)$ ce qui est très long à calculer.
Mais le contraire de $(X \geqslant 2)$ est $(X < 2)$ soit $(X = 0)$ ou $(X = 1)$.
Ainsi, $p(X \geqslant 2) = 1 - \Big[p(X = 0) + p(X = 1)\Big]$.

4. Le coût d'un trajet aller ou d'un trajet retour est de 1 560 € en bateau ; il est de 1 200 € en train.
On note Y la variable aléatoire qui associe, à un client pris au hasard, le coût en euro de son trajet aller-retour.

a. En écrivant les valeurs de la variable aléatoire Y, on obtient :

Valeurs de Y :



On peut établir la loi de probabilité de Y :

y_i	3 120	2 760	2 400
$p(Y=y_i)$	$0,585$	$0,31$	$0,105$

b. L'espérance mathématique de Y est :
$3\,120\times 0,585+2\,760\times 0,31+2\,400\times 0,105=2\,932,80$.
L'agence de voyage peut annoncer un coût moyen pour le voyage aller-retour de 2 932,80 €.

Exercice 2

1. A et B sont indépendants donc $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=p(\mathrm{A})\times p(\mathrm{B})$.

2. L'événement contraire de "obtenir au moins une fois le côté face" est "obtenir aucune fois le côté face", autrement dit "obtenir que des piles".

La probabilité d'avoir pile est $\dfrac{2}{3}$. La probabilité de n'avoir que des pile est donc $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4$, donc la probabilité d'avoir au moins une fois face est égale $1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\dfrac{3^4-2^4}{3^4}=\dfrac{81-16}{81}=\dfrac{65}{81}$.

Pensez-y !

On a une loi binomiale (répétition de 4 fois la même épreuve de manière identique et indépendante).
Pensez à l'événement contraire pour calculer cette probabilité. En effet, on a la relation $p(\overline{A})=1-p(A)$. Donc si on a l'une, on a l'autre !

3. On a :

- $p(\mathrm{F})=1-0,2=0,8$;
- $p_{\mathrm{E}}(\mathrm{H})=1-0,6=0,4$; $p_{\mathrm{F}}(\mathrm{H})=1-0,3=0,7$;
- $p(\mathrm{E}\cap\mathrm{H})=p_{\mathrm{E}}\times p_{\mathrm{E}}(\mathrm{H})=0,2\times 0,4=0,08$;
- $p(\mathrm{F}\cap\mathrm{H})=p_{\mathrm{F}}\times p_{\mathrm{F}}(\mathrm{H})=0,8\times 0,7=0,56$.

Donc, d'après la formule des probabilités totale, $p(\mathrm{H})=p(\mathrm{E}\cap\mathrm{H})+p(\mathrm{F}\cap\mathrm{H})=0,08+0,56=0,64$.
Enfin $p_{\mathrm{H}}(\mathrm{F})=\dfrac{p(\mathrm{F}\cap\mathrm{H})}{p(\mathrm{H})}=\dfrac{0,56}{0,64}=\dfrac{56}{64}=\dfrac{7}{8}=0,875$.

4. L'évènement contraire est : « obtenir n boules de la même couleur ».

Encore une fois

C'est grâce à l'événement contraire qu'on va trouver cette probabilité !

- La probabilité de tirer un boule blanche est $\frac{1}{2}$, donc la probabilité de tirer n boules blanches est $\frac{1}{2^n}$.
- La probabilité de tirer un boule noire est $\frac{1}{2}$, donc la probabilité de tirer n boules noires est $\frac{1}{2^n}$.

Attention

Il y a deux façons d'avoir des boules de même couleur : soit elles sont toutes blanches (B), soit elles sont toutes noires (N). Ces deux événements étant incompatibles, on a :

$$P(B \cup N) = P(B) + P(N)$$

Donc la probabilité de tirer n noires ou n blanches est : $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$. Finalement la probabilité d'obtenir des boules qui ne soient pas toutes de la même couleur est égale à $1 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

5. On peut résumer la situation avec ce tableau :

Valeurs x_i	2	3	a
Probabilités p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$p(6)$

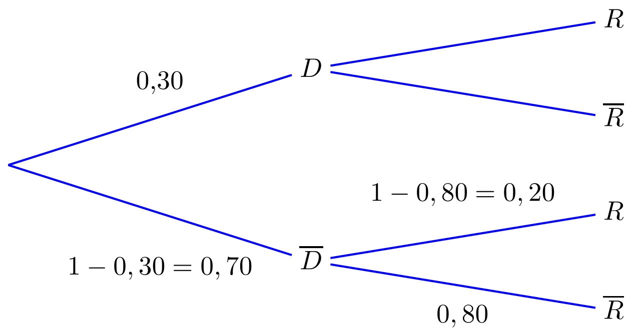
On commence par calculer $p(6)$ sachant que $p(2) + p(3) + p(a) = 1$.
On obtient ainsi : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + p(a) = 1$ soit $p(a) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

L'espérance mathématique nulle se traduit par l'égalité :

$$\begin{aligned} 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{3} + a \times \frac{1}{6} &= 0 \\ 1 + 1 + \frac{1}{6}a &= 0 \\ \frac{1}{6}a &= -2 \\ a &= -12 \end{aligned}$$

Exercice 3

1. a. On représente la situation par un arbre pondéré :



Attention

La probabilité 0,38 n'apparaît pas dans l'arbre. C'est $p(R)$.

b. Le candidat n'a pas un dossier de bonne qualité et n'est pas recruté par l'entreprise correspond à l'évènement $\overline{D} \cap \overline{R}$.
$p\left(\overline{D} \cap \overline{R}\right) = p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(\overline{R}) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$.

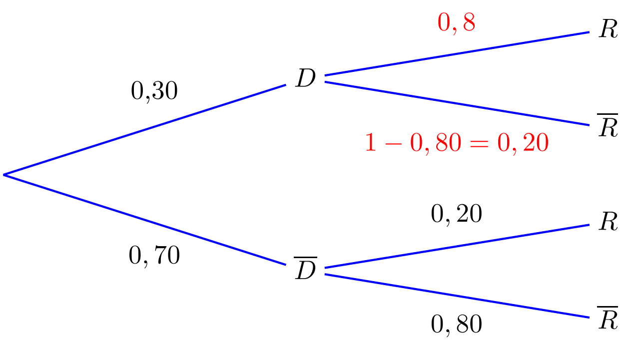
c. D'après l'énoncé, on sait que $P(R) = 0,38$.
En utilisant la formule des probabilités totales (D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers) :

$$p(R) = p\left(D \cap R\right) + p\left(\overline{D} \cap R\right)$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcll}
\underbrace{0,38}_{p(R)} & = & P(D \cap R) + \underbrace{0,7 \times 0,2}_{p(\overline{D} \cap R)} & \\
0,38 - 0,14 & = & P(D \cap R) & \text{On retranche 0,14 dans chaque membre} \\
P(D \cap R) & = & 0,24 &
\end{array}$$

d. Un candidat est recruté sachant que son dossier est jugé de bonne qualité correspond à l'évènement $P_D(R)$.
$P_D(R) = \dfrac{P(D \cap R)}{P(D)} = \dfrac{0,24}{0,3} = 0,8$.
On peut donc compléter l'arbre pondéré :



2. a. La probabilité qu'une personne soit recrutée est $p = 0,38$.

Dix personnes postulent pour un emploi dans l'entreprise.
Les études de leurs candidatures sont faites indépendamment les unes des autres, on est donc dans un cas de répétition de 10 épreuves indépendantes ; la variable aléatoire X qui donne le nombre de personnes recrutées par l'entreprise suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,38$.

Pensez-y !
La loi binomiale se justifie par la répétition d'épreuves identiques et indépendantes. Les paramètres sont le nombre de répétitions et la probabilité de succès.

b. Dans le cas d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p, on sait que la probabilité d'obtenir k succès est :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k \left(1 - p\right)^{n-k}$$

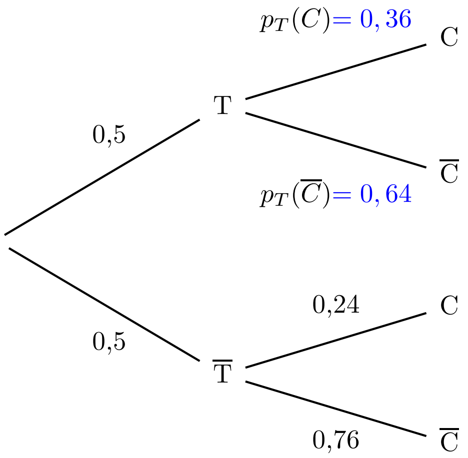
On demande la probabilité qu'au moins une des dix personnes soit recrutée, c'est-à-dire $P(X \geqslant 1)$.

$$\begin{array}{rcl}
p(X \geqslant 1) & = & 1 - P(X = 0) \\
 & = & 1 - \underbrace{\binom{10}{0}}_{=1} \times \underbrace{0,38^0}_{=1} \times (1 - 0,38)^{10-0} \\
 & = & 1 - 0,62^{10} \\
 & \approx & 0{,}992
\end{array}$$

Pensez-y !
Très très classique. On vous demande la probabilité qu'au moins une personne soit recrutée (c'est-à-dire 1, 2, 3 .... ou 10 personnes). Evidemment, on ne va pas calculer $p(X = 1) + p(X = 2) + ... + p(X = 10)$. On utilise l'événement contraire qui est "aucune personne n'est recrutée". On a donc $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0)$ et le tour est joué !

Exercice 4

On modélise la situation par un arbre :



Attention

0,3 ne doit pas apparaître sur cet arbre. En effet ce nombre est la probabilité de l'événement C. Ce n'est pas une probabilité conditionnelle.

1. La probabilité que le pigeon soit tué et le fil coupé est bien de 0,18.
En effet, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{array}{rcl} p(C) & = & p(T\cap C)+p(\overline{T}\cap C) \\ p(T\cap C) & = & p(C)-p(\overline{T}\cap C) \\ p(T\cap C) & = & p(C)-p(\overline{T})\times p_{\overline{T}}(C) \\ p(T\cap C) & = & 0,3-0,5\times 0,24 \\ p(T\cap C) & = & 0,18 \end{array}$$

2. La probabilité permettant de répondre à cette question est : $p(T\cap\overline{C})$.

On a d'après la question précédente $p(T\cap C)=0,18$.

Ainsi, $p_T(C)=\dfrac{P(T\cap C)}{P(T)}=\dfrac{0,18}{0,5}=0,36$.

Comme $p_T(\overline{C})=1-p_T(C)=1-0,36=0,64$.

Donc, $p(T\cap\overline{C})=p(T)\times p_T(\overline{C})=0,5\times 0,64=0,32$.

La probabilité qu'il rentre de la chasse avec un pigeon et qu'il puisse raconter ses exploits au téléphone est de 0,64.

Conseil

Identifiez bien la probabilité qu'il faut calculer. Pour obtenir celle qui nous intéresse ici, on a besoin d'en calculer d'autres. Complétez l'arbre au fur et à mesure des résultats.

3. On doit calculer $p_{\overline{C}}(\overline{T})$.

Explication

Sa femme est en train de téléphoner. Nanolos n'a donc pas coupé le fil du téléphone.

$p_{\overline{C}}(\overline{T})=\dfrac{p(\overline{C}\cap\overline{T})}{p(\overline{C})}=\dfrac{0,5\times 0,76}{1-0,3}\simeq 0,54.$

Sachant que sa femme est en train de téléphoner, donc que le fil n'est pas coupé, la probabilité qu'il soit bredouille est d'environ 0,54.

4. $p(T\cap\overline{C})=0,5\times 0,64=0,32$ et $p(T)\times p(\overline{C})=0,5\times 0,7=0,35$.

Donc, pour Nanolos, les évènements « téléphoner » et « manger du pigeon » ne sont pas indépendants.