**Lycée Louise Michel (Gisors)**
**Terminale S**

# MATHEMATIQUES
## Probabilités conditionnelles - Indépendance : entraînement savoir-faire (corrigé)

## Exercice 1

**1.** Le choix de la personne se fait au hasard. La loi est équirépartie.
Pour calculer la probabilité d'un événement $A$, on utilise la formule :

$$p(A) = \frac{\text{Nombre d'issues qui réalisent } A}{\text{Nombre total d'issues}}$$

**a.** La probabilité que ce soit un homme est donnée par :

$$\frac{\text{Nombre d'hommes}}{\text{Nombre total de personnes}} = \frac{72}{120} = \frac{3}{5}$$

**b.** La probabilité que ce soit une femme qui a des enfants est donnée par :

$$\frac{\text{Nombre de femmes ayant des enfants}}{\text{Nombre total de personnes}} = \frac{42}{120} = \frac{7}{20}$$

**c.** La probabilité que la personne n'ait pas d'enfants est donnée par :

$$\frac{\text{Nombre de personnes sans enfants}}{\text{Nombre total de personnes}} = \frac{17}{120}$$

**2.** La personne est choisie parmi les femmes. Ainsi, la probabilité qu'elle ait des enfants est donnée par :

$$\frac{\text{Nombre de femmes ayant des enfants}}{\text{Nombre de femmes}} = \frac{42}{48} = \frac{7}{8}$$

**Explications**

La probabilité que vous devez calculer est une probabilité conditionnelle. En effet, l'univers ici est constitué seulement des femmes (il y en a 48). Si on utilise les notations de la question 4, on note cette probabilité $p_F(E)$.

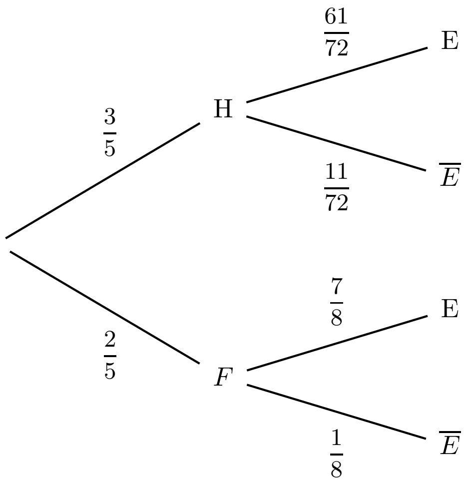
**3.** La personne est choisie parmi les personnes qui ont des enfants. Ainsi, la probabilité que ce soit une femme est donnée par :

$$\frac{\text{Nombre de femmes ayant des enfants}}{\text{Nombre de personnes qui ont des enfants}} = \frac{42}{103}$$

**Remarque**

Cette probabilité se note $p_E(F)$. Elle est évidemment différente de la probabilité précédente, puisque l'ensemble de référence (l'univers) n'est pas le même.

**4.** Arbre complété :



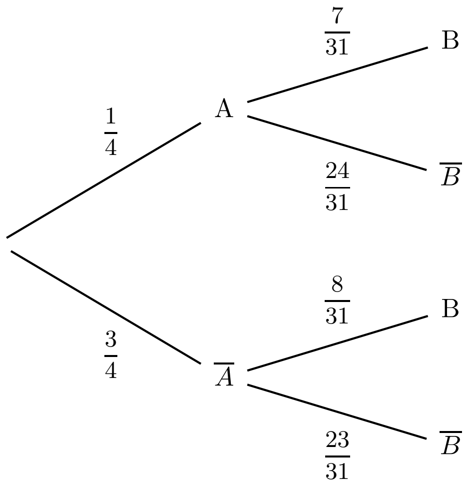
## Exercice 2

- $p(A) = \dfrac{\text{Nombre de coeurs}}{\text{Nombre total de cartes}} = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$.

On a alors $p(\overline{A}) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

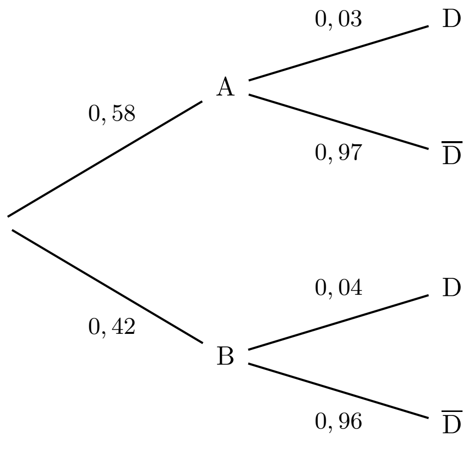
- La probabilité de tirer un coeur au deuxième tirage sachant qu'on a déjà tiré un coeur au premier est $p_A(B) = \dfrac{\text{Nombre de coeurs qui restent}}{\text{Nombre de cartes qui restent}} = \dfrac{7}{31}$. Aussi, la probabilité de ne pas tirer un coeur au deuxième tirage sachant qu'on a tiré un coeur au premier tirage est $p_A(\overline{B}) = 1 - \dfrac{7}{31} = \dfrac{24}{31}$.

- La probabilité de tirer un coeur au deuxième tirage sachant qu'on n'a pas tiré un coeur au premier est $p_{\overline{A}}(B) = \dfrac{\text{Nombre de coeurs qui restent}}{\text{Nombre de cartes qui restent}} = \dfrac{8}{31}$. Ainsi, la probabilité de ne pas tirer un coeur au deuxième tirage sachant qu'on n'a pas tiré un coeur au premier tirage est $p_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - \dfrac{8}{31} = \dfrac{23}{31}$.




## Exercice 3

**1.** Arbre pondéré résumant la situation :




**2.** Calcul des probabilités.

**a.** $P(\text{B} \cap \text{D}) = P(\text{B}) \times P_{\text{B}}(\text{D}) = 0{,}42 \times 0{,}04 = 0,0168$.

La probabilité qu'un ordinateur provienne du fabricant B et soit défectueux est de $0,0168$.

**b.** $P(\text{A} \cap \overline{\text{D}}) = P(\text{A}) \times P_{\text{A}}(\overline{\text{D}}) = 0{,}58 \times 0{,}97 = 0,5626$.

**Remarque**

La probabilité de l'intersection de deux événements est donnée par le produit des probabilités inscrites sur les branches de l'arbre.

**3. a.** $P_{\mathrm{D}}(\mathrm{B}) = \dfrac{P(\mathrm{D} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{D})} = \dfrac{0,0168}{0,0342} \simeq 0{,}49.$

**b.** $P_{\overline{\mathrm{D}}}(\mathrm{B}) = \dfrac{P(\overline{\mathrm{D}} \cap \mathrm{B})}{P(\overline{\mathrm{D}})} = \dfrac{P(\mathrm{B}) \times P_{\mathrm{B}}(\overline{\mathrm{D}})}{1 - P(\mathrm{D})} = \dfrac{0{,}42 \times 0{,}96}{1 - 0,0342} \simeq 0{,}417.$

**Conseil**

Traduisez toujours la probabilité que vous devez calculer avec les événements.

## Exercice 4

Les événements $A$, $B$ et $C$ forment une partition de l'univers.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(\mathrm{M}) &= P(\mathrm{A} \cap \mathrm{M}) + P(\mathrm{B} \cap \mathrm{M}) + P(\mathrm{C} \cap \mathrm{M}) \\ &= P(\mathrm{A}) \times P_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) + P(\mathrm{B}) \times P_{\mathrm{B}}(\mathrm{M}) + P(\mathrm{C}) \times P_{\mathrm{C}}(\mathrm{M}) \\ &= 0{,}25 \times 0{,}4 + 0{,}45 \times 0{,}8 + 0{,}3 \times 0{,}5 \\ &= 0{,}61 \end{aligned}$$

**Conseil**

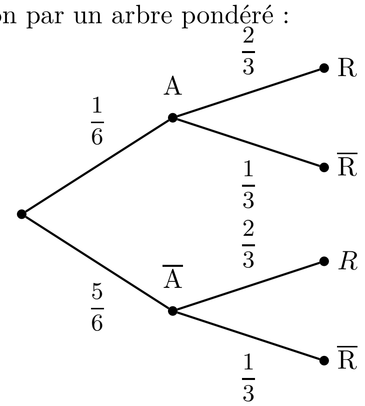
Ecrivez les calculs avec les événements avant de passer à l'application numérique.

## Exercice 5

**Méthode**

Pour montrer que les deux événements $A$ et $R$ sont indépendants, on montre que $P(A \cap R) = P(A) \times P(R)$.
Il faut donc calculer $P(R)$ et pour cela, on utilise un arbre pondéré pour faciliter la tâche....

On commence par modéliser la situation par un arbre pondéré :




$$\begin{aligned} P(\mathrm{R}) &= P(\mathrm{A} \cap \mathrm{R}) + P(\mathrm{B} \cap \mathrm{R}) \\ &= P(\mathrm{A}) \times P_{\mathrm{A}}(\mathrm{R}) + P(\mathrm{B}) \times P_{\mathrm{B}}(\mathrm{R}) \\ &= \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

**Déjà là**

On remarque que $P(R) = P_A(R)$. Donc $A$ et $R$ sont indépendants.

De plus $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{R}) = P(\mathrm{A}) \times P_{\mathrm{A}}(\mathrm{R}) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{9}$.

Or $P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{R}) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{9} = P(\mathrm{A} \cap \mathrm{R})$.

On en déduit que les évènements A et R sont indépendants.

## Exercice 6

On commence par noter les évènements :

$M_1$ : « le premier moteur tombe en panne » ;

$M_2$ : « le second moteur tombe en panne » ;

L'avion se crashe lorsque les deux moteurs tombent en panne en même temps c'est à dire quand l'évènement $M_1 \cap M_2$ est réalisé :

$$\begin{aligned} P(M_1 \cap M_1) &= P(M_1) \times P(M_1) \\ &= 0,002 \times 0,002 \\ &= 0,000004 \end{aligned}$$

La probabilité que l'avion arrive à bon port est donc égale à :

$$P(\overline{M_1 \cap M_2}) = 1 - P(M_1 \cap M_2) = 1 - 0,000004 = 0,999996$$

## Exercice 7

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) && \text{Faites un diagramme pour établir cette égalité.} \\ &= P(B) - P(A) \times P(B) && \text{Car les évènements A et B sont indépendants} \\ &= (1 - P(A)) \times P(B) && \text{On factorise.} \\ &= P(\overline{A}) \times P(B) \end{aligned}$$

Ainsi, $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P(B)$ ce qui prouve que les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.