MATHEMATIQUES
Suites. Limites de suites : entraînement 2

Exercice 1

1. a. Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 6 \\
&= \frac{1}{3}u_n + 4 - 6 \quad \text{On remplace } u_{n+1} \text{ par } \frac{1}{3}u_n + 4 \\
&= \frac{1}{3}u_n - 2 \quad \text{On réduit} \\
&= \frac{1}{3}\underbrace{(v_n + 6)}_{u_n} - 2 \quad \text{On remplace } u_n \text{ par } v_n + 6. \\
&= \frac{1}{3}v_n + \cancel{2} - \cancel{2} \quad \text{On développe et réduit.} \\
&= \frac{1}{3}v_n \quad \text{On obtient une forme du type : } q \times v_n
\end{aligned}$$

Explications

On exprime u_n en fonction de v_n en utilisant l'égalité : $v_n = u_n - 6$.
On obtient : $u_n = v_n + 6$.

On vient de montrer que (v_n) est une suite géométrique (car cette égalité est vraie pour tous les entiers naturels n) de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = 1 - 6 = -5$.

b. Donc pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a $v_n = v_0 \times q^n = -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Or $v_n = u_n - 6$ donc $u_n = v_n + 6$ et on obtient bien $u_n = -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.

c. Calcul de la limite de u_n.

$$\left.\begin{array}{l}
\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \text{ car } -1 < \frac{1}{3} < 1 \\
\text{Par produit, } \lim\limits_{n\to+\infty} -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0
\end{array}\right\} \text{Par somme, } \lim\limits_{n\to+\infty} -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6 = 6.$$

La suite (u_n) converge vers 6.

2. a. On applique la formule de récurrence définissant (w_n) pour $n = 10$:

$10w_{10} = 11w_9 + 1$ donc $10w_{10} = 11 \times 19 + 1 = 210$ donc $w_{10} = 21$.

Explications

C'est tout simple : on remplace n par 10. Bien évidemment le résultat doit être cohérent avec la valeur qu'on peut (facilement ?) deviner grâce au tableau.

b. On conjecture que que pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a :

$$w_n = 2n + 1$$

c. Démontrons-le par récurrence sur n.

- **Initialisation :** $w_0 = 1$ et $2 \times 0 + 1 = 1$: La propriété est vraie au rang 0.

- **Hérédité :** Soit n un entier naturel fixé quelconque.
  On suppose vraie la propriété au rang n c'est-à-dire $w_n = 2n + 1$.

  On sait que $(n+1)w_{n+1} = (n+2)w_n + 1$.

  Explications

  C'est l'égalité de départ que l'on écrit en remplaçant n par $n+1$. Pourquoi faire cela ? Parce que on a ainsi une égalité liant w_n et w_{n+1}.... N'oubliez pas ce que l'on cherche à démontrer : $w_{n+1} = 2(n+1)+1$.
  Dans l'égalité liant w_n et w_{n+1} en remplaçant w_n par $2n+1$ on doit réussir à obtenir le résultat.

  Or par hypothèse de récurrence, $w_n = 2n + 1$.
  On obtient en remplaçant w_n par $2n + 1$ dans l'égalité précédente :

  $(n+1)w_{n+1} = (n+2)(2n+1) + 1 = 2n^2 + 5n + 3$
  Or $n + 1 \neq 0$ donc on en déduit que $w_{n+1} = \dfrac{2n^2 + 5n + 3}{n+1}$.
  Le trinôme $2n^2 + 5n + 3$ a deux racines -1 et $-1,5$.
  Il se factorise donc par : $2(n+1)(n+1,5) = (n+1)(2n+3)$.

  Ainsi, $w_{n+1} = \dfrac{(n+1)(2n+3)}{n+1} = 2n + 3$.
  $2n + 3 = 2(n+1) + 1$ c'est à dire que la propriété au rang $n + 1$ est vraie.

- **Conclusion :** Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $w_n = 2n + 1$.

d. La suite (w_n) est arithmétique de raison 2 et de premier terme 1.

$w_{2019} = 2 \times 2019 + 1 = 4\,039$.

Exercice 2

- Partie A -

1. a. On a pour tout entier naturel n : $\dfrac{1}{n+1} \geqslant 0$. De plus $n + 1 \geqslant 1$, donc $\dfrac{1}{n+1} \leqslant 1$.

Ainsi, $0 \leqslant \dfrac{1}{n+1} \leqslant 1$ pour tout entier naturel n et donc (x_n) est une suite bornée.

b. La fonction f associée à cette suite est la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.
Cette fonction est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ (c'est l'inverse d'une fonction dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ qui ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$).

Autre méthode

Comme la suite est du type, $x_n = f(n)$, le sens de variation de f donne le sens de variation de (x_n).
On pouvait aussi étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n. On obtient heureusement le même résultat.

Pour tout réel x de $[0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2} < 0$.
Ainsi f est strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ et par suite (x_n) l'est aussi.

Rappel

On utilise ici : $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$ avec $u(x) = x+1$ et $u'(x) = 1$.

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} n + 1 = +\infty$, par passage à l'inverse, on obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.
Ainsi, (x_n) converge vers 0.

2. Soit (y_n) la suite définie par $y_n = -2 \times (-1)^n$.

a. On a pour tout entier naturel n : $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ et en multipliant par -2, on obtient $-2 \leqslant y_n \leqslant 2$. Ainsi$(y_n)$ est une suite bornée.

b. La suite $((-1)^n)$ est une suite qui n'a pas de limite : elle est donc divergente. Il en est de même pour la suite (y_n).

- Partie B -

1. FAUX.

En effet, considérons la suite u définie pour tout n par :

$$u_n = \frac{1}{n+1}$$

Alors aucun terme de u_n n'est nul, et u converge vers 0.

Mais $v_n = \dfrac{-2}{u_n} = -2(n+1)$, donc v diverge vers $-\infty$.

Remarque

Pourquoi ne pas avoir choisi la suite u définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$. C'est une bonne question.... tout simplement parce que l'énoncé précise que (u_n) doit être définie sur $\mathbb{N}$ et que ce n'est pas le cas de la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$.

2. VRAI.

Si (u_n) est minorée par 2, alors pour tout entier n, on a :

$$2 \leqslant u_n.$$

Comme la fonction inverse est décroissante sur $[2\ ;\ +\infty[$, il vient :

$$\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{u_n}$$

En multipliant par -2 :

$$-1 \leqslant v_n.$$

Ainsi (v_n) est minorée par -1.

3. FAUX.

Soit u la suite définie par : $\quad u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Cette suite est décroissante (avec aucun terme nul) et la suite v définie par $v_n = \dfrac{-2}{u_n} = -2(n+1)$ est décroissante non constante, donc on ne peut pas dire qu'elle soit croissante.

4. FAUX.

Rappelons qu'une suite est divergente si elle n'est pas convergente.
Donc soit elle tend vers $\pm\infty$, soit elle n'a pas de limite.
Pour construire un contre-exemple, il suffit de trouver une suite (u_n) qui diverge mais sans tendre vers l'infini.
Par exemple :

$$u_n = -2(-1)^n \text{ donc } v_n = (-1)^n.$$

Comme la suite de terme général $(-1)^n$ diverge alors u et v divergent.

Exercice 3

1. **a.** Justification de l'égalité.

La population de la zone A en 2018 + $(n+1)$ (c'es-à-dire a_{n+1}) est constituée de :

- 90 % de la population de la zone A de l'année précédente soit $0,9a_n$.
- 10 % de la population de la zone B de l'année précédente soit $0,1b_n$.

a_{n+1} est la somme de ces deux populations, ainsi :
$a_{n+1} = 0,9a_n + 0,1b_n$.

N'oubliez pas !

Diminuer une quantité de 10 % revient à la multiplier par $1 - 0,1 = 0,9$.

b. Avec la calculatrice, on obtient :

Au bout de 20 ans, la zone A aura 3517 habitants et la zone B 3483 habitants.

A remarquer

La somme des deux populations est bien de 7000 habitants ce qui est bien cohérent avec la consigne à savoir que la population totale des deux zones reste constante.

c. On conjecture que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers 3500.

2. Pour tout entier naturel n,

$$\begin{array}{rcl} w_{n+1} & = & a_{n+1} - b_{n+1} \\ & = & 0,9b_n + 0,1a_n - (0,9a_n + 0,1b_n) \\ & = & 0,8b_n - 0,8a_n \\ & = & 0,8(b_n - a_n) \\ & = & 0,8w_n \end{array}$$

La suite (w_n) est géométrique de raison 0,8.

3. **a.** Comme la population totale des deux zones reste constante, on a $a_n + b_n = 5000 + 2000 = 7000$.

b. Comme $w_n = a_n - b_n$ et que $b_n = 7000 - a_n$, on en déduit : $w_n = a_n - (7000 - a_n) = 7000 + 2a_n$.

$$\begin{array}{rcl} w_n & = & 7000 + 2a_n \\ w_n - 7000 & = & 2a_n \\ \dfrac{w_n - 7000}{2} & = & a_n \\ a_n & = & \dfrac{1}{2}w_n + 3500 \end{array}$$

Comme (w_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $w_0 = a_0 - b_0 = 5000 - 2000 = 3000$.

D'où, pour tout entier naturel n : $w_n = w_0 \times q^n = 3000 \times 0,8^n$.
Par conséquent,

$$a_n = \frac{1}{2} \times \underbrace{3000 \times 0,8^n}_{w_n} + 3500 = 1500 \times 0,8^n + 3500$$

c. Calcul des limites.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^n = 0 \text{ Car } -1 < 0,8 < 1 \\ \text{Par produit : } \lim\limits_{n \to +\infty} 1500 \times 0,8^n = 0 \end{array}\right\} \text{Par somme, } \lim\limits_{n \to +\infty} 1500 \times 0,8^n + 3500 = 3500.$$

Pr conséquent, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 3500$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} b_=3500$ car pour tout entier naturel n : $a_n + b_n = 7000$.

On peut donc dire qu'à terme les populations des deux zones seront égales (3500 habitants chacune).