
MATHÉMATIQUES

AP : Approfondissements (2)

Exercice 1

1. Montrer que pour tous réels a, b, c et d :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

2. Utiliser l'égalité précédente pour écrire le nombre 13×74 sous la forme d'une somme de deux carrés d'entiers, et ceci de deux manières différentes.

Exercice 2

Soient a, b et c trois réels tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
Que vaut $S = a^4 + (ab + c)^2 + (ac - b)^2$?

Exercice 3

1. Soient a et b deux réels dont la somme vaut 5 et la somme des carrés est égale à 17.
Que vaut le produit de ces deux réels ?
2. Soient c et d deux réels tels que $c + d = 8$ et $cd = 4$.
Que vaut la somme $\frac{1}{c} + \frac{1}{d}$?
3. Soient m et p deux réels tels que $m^2 = 6 + p^2$ et $m + p = 3$. Que vaut la différence $m - p$?

Exercice 4

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Calculer $\frac{2^{999} + 2^{998} + 2^{998}}{2^{498}}$.
2. Soient a, b et c trois réels tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 8$, $a + b + c = 4$ et $abc = 1$. Calculer $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.
3. Soient m et p deux réels tels que $m^2 - 200m + p^2 + 10000 = 0$. Calculer la somme $(m + p)$.
4. Soient ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 156$ et $AC = 65$ et H le pied de la hauteur issue de A . Déterminer la valeur de AH .

Exercice 5

1. Montrer que, pour tous réels m et p :

$$(m^2 - p^2)^2 + (2mp)^2 = (m^2 + p^2)^2$$

2. Un triplet $(a; b; c)$ est dit Pythagorien primitif lorsque a, b et c sont trois entiers naturels premiers entre eux tels que $a^2 + b^2 = c^2$.
Vérifier que $(3; 4; 5)$ est un triplet Pythagorien primitif puis utiliser l'identité démontrée dans la première question pour en trouver deux autres.