

---

## MATHÉMATIQUES

### AP : Approfondissements (2)

---

#### Exercice 1

1. Montrer que pour tous réels  $a, b, c$  et  $d$  :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

2. Utiliser l'égalité précédente pour écrire le nombre  $13 \times 74$  sous la forme d'une somme de deux carrés d'entiers, et ceci de deux manières différentes.

#### Exercice 2

Soient  $a, b$  et  $c$  trois réels tels que  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ .  
Que vaut  $S = a^4 + (ab + c)^2 + (ac - b)^2$  ?

#### Exercice 3

1. Soient  $a$  et  $b$  deux réels dont la somme vaut 5 et la somme des carrés est égale à 17.  
Que vaut le produit de ces deux réels ?
2. Soient  $c$  et  $d$  deux réels tels que  $c + d = 8$  et  $cd = 4$ .  
Que vaut la somme  $\frac{1}{c} + \frac{1}{d}$  ?
3. Soient  $m$  et  $p$  deux réels tels que  $m^2 = 6 + p^2$  et  $m + p = 3$ . Que vaut la différence  $m - p$  ?

#### Exercice 4

*Les questions suivantes sont indépendantes.*

1. Calculer  $\frac{2^{999} + 2^{998} + 2^{998}}{2^{498}}$ .
2. Soient  $a, b$  et  $c$  trois réels tels que  $a^2 + b^2 + c^2 = 8$ ,  $a + b + c = 4$  et  $abc = 1$ . Calculer  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ .
3. Soient  $m$  et  $p$  deux réels tels que  $m^2 - 200m + p^2 + 10000 = 0$ . Calculer la somme  $(m + p)$ .
4. Soient  $ABC$  un triangle rectangle en  $A$  tel que  $AB = 156$  et  $AC = 65$  et  $H$  le pied de la hauteur issue de  $A$ . Déterminer la valeur de  $AH$ .

#### Exercice 5

1. Montrer que, pour tous réels  $m$  et  $p$  :

$$(m^2 - p^2)^2 + (2mp)^2 = (m^2 + p^2)^2$$

2. Un triplet  $(a; b; c)$  est dit Pythagorien primitif lorsque  $a, b$  et  $c$  sont trois entiers naturels premiers entre eux tels que  $a^2 + b^2 = c^2$ .  
Vérifier que  $(3; 4; 5)$  est un triplet Pythagorien primitif puis utiliser l'identité démontrée dans la première question pour en trouver deux autres.