FONCTIONS

4

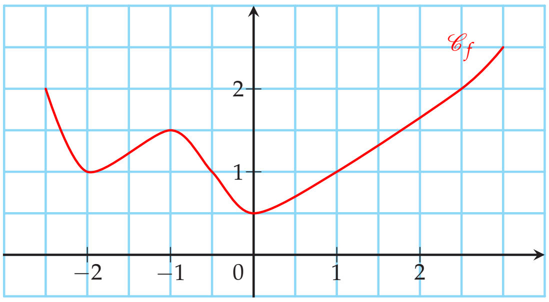
Généralités sur les fonctions. Fonctions de référence

Les savoir-faire du chapitre

- **110.** Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe.
- **111.** Résoudre graphiquement une équation.
- **112.** Résoudre graphiquement une inéquation.
- **113.** Connaître et utiliser les fonctions de référence.

Un peu d'activités mentales

1 On donne la représentation graphique d'une fonction f.



1) Placer le point A de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 2.
2) Indiquer en bleu les points de $\mathscr{C}_f$ d'ordonnée 1.
3) Compléter :
   a) $C(0\,;\,....) \in \mathscr{C}_f$.
   b) $M(-2,5\,;\,....) \in \mathscr{C}_f$.
   c) $N(....\,;\,3) \in \mathscr{C}_f$.
   d) $P(1\,;\,....) \in \mathscr{C}_f$.

2 On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = x^2 + x - 4.$$

1) $g(0) = ...$
2) $g(2) = ...$
3) $g(-1) = ...$
4) $g(-3) = ...$

3 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 2x - 1.$$

1) $f(3) = ...$
2) $f(-5) = ...$
3) $f(6) = ...$
4) $f\left(\frac{1}{2}\right) = ...$

4 On considère la fonction h définie par :

$$h(x) = 1 - 2x.$$

1) Donner l'antécédent de 3 : ......
2) Donner l'antécédent de -5 : ......

5 Compléter :

1) Le carré de -3 est : .....
2) Le cube de -2 est : .....
3) L'inverse de 5 est : .....
4) La racine carrée de 16 est : .....

6 Calculer :

1) $(-1)^3 = ...$
2) $\sqrt{6^2} = ...$
3) $\frac{1}{3} \times 6 = ...$
4) $5^2 - 2^3 = ...$
5) $\sqrt{\frac{1}{4}} = ...$
6) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = ...$
7) $\sqrt{1} = ...$
8) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = ...$

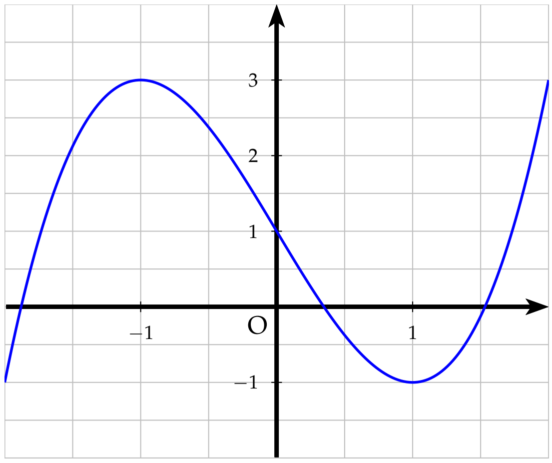
S'entraîner

Savoir-faire - Méthodes

110 **Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe.**

1) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Sa courbe représentative est donnée ci-contre.



a) A est le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 1,2. Quel est son ordonnée ?

....

b) Le point $P(0,5\ ;\ -0,38)$ est-il sur $\mathscr{C}_f$?

....

....

c) Quelle est l'ordonnée du point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0,5 ?

....

....

....

2) Soit g la fonction définie par $g(x) = 0,2x - 0,1$. On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère.

a) Une équation de la courbe $\mathscr{C}_g$ dans un repère est : ....

b) $\mathscr{C}_g$ passe-t-elle par l'origine du repère ? Justifier. ....

....

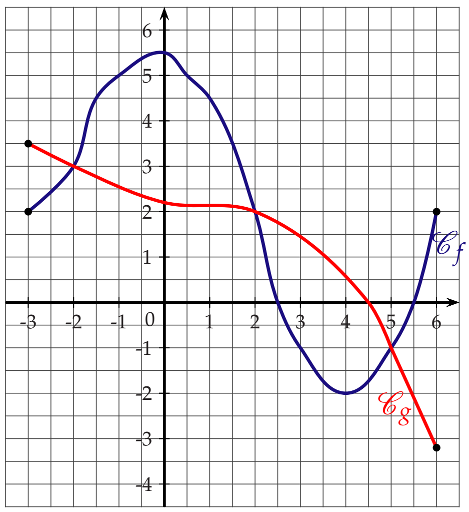
c) Déterminer les coordonnées du points d'intersection de $\mathscr{C}_g$ avec l'axe des abscisses. ....

....

....

111 **Résoudre graphiquement une équation.**

Pour résoudre une équation du type $f(x) = k$, on trace la droite d'équation $y = k$. Les abscisses des points d'intersections avec la courbe $\mathscr{C}_f$ sont les solutions de l'équation.

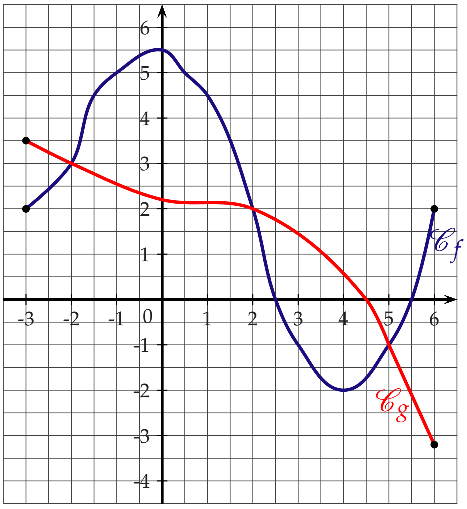


Résoudre graphiquement :

- $f(x) = 5$ ....
- $f(x) = -1$ ....
- $f(x) = 0$ ....
- $f(x) = g(x)$ ....

112 **Résoudre graphiquement une inéquation.**

Pour résoudre une inéquation du type $f(x) > k$, on trace la droite d'équation $y = k$. Les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ qui se situent au dessus de cette droite sont les solutions de l'inéquation.



Résoudre graphiquement :

- $f(x) > -1$ ....
- $f(x) \leqslant 2$ ....
- $f(x) > 0$ ....
- $f(x) < g(x)$ ....
- $g(x) \geqslant f(x)$ ....

113 **Connaître et utiliser les fonctions de référence.**

1) Pour chacune des fonctions suivantes, dire s'il s'agit d'une fonction affine (si c'est le cas, préciser m et p).

1. $f(x) = 5x - 6$.
....

2. $f(x) = 3 - 2x$.
....

3. $f(x) = \dfrac{2}{3}x - 1$.
....

4. $f(x) = 2 - (2x - 1)$.
....

5. $f(x) = x^2 + 2$.
....

6. $f(x) = \dfrac{x}{7}$.
....

Pour représenter graphiquement une fonction affine (ou une droite) on peut faire un tableau de valeurs ou bien utiliser l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur. Deux points suffisent pour obtenir le tracé.

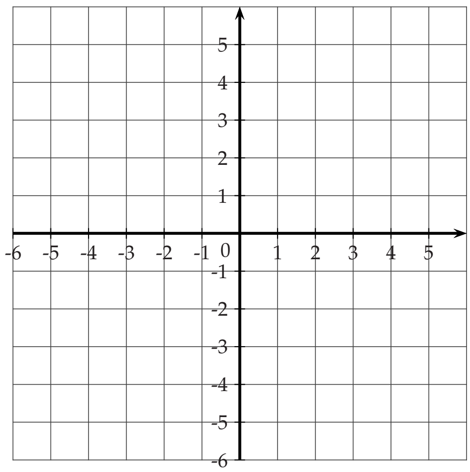
2) **a)** Après avoir complété le tableau de valeurs, représenter graphiquement les fonctions affines f_1 et f_2 :

$f_1(x) = 2x - 1$

x		
$f_1(x)$		

$f_2(x) = -x + 1$

x		
$f_2(x)$		

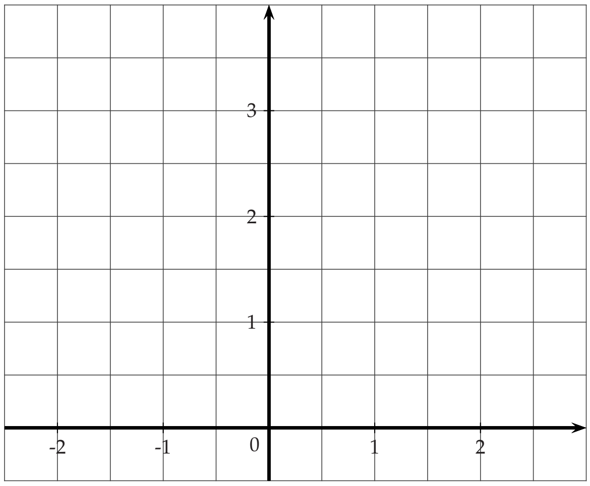


b) En utilisant l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur, représenter graphiquement les fonctions affines f_3 et f_4 définies par :

$$f_3(x) = 2x - 3 \quad \text{et} \quad f_4(x) = -3x - 1$$

S'entraîner

3) a) Représenter graphiquement la fonction carré dans le repère ci-dessous :
En utilisant le graphique, résoudre $x^2 < 3$, puis $x^2 \geqslant 1$.



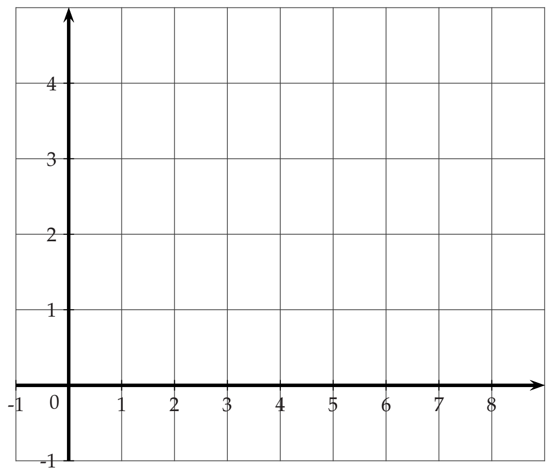
> On trace la droite d'équation $y = 3$. Elle coupe la parabole en deux points dont les abscisses sont les solutions de l'équation $x^2 = 3$. On repère tous les points de la parabole dont l'ordonnée est inférieure strictement à 3. Les solutions de l'inéquation sont les abscisses de ces points.

b) Résoudre algébriquement les équations suivantes : $x^2 = 16$, $x^2 = -9$, puis $x^2 = 8$.

> L'équation $x^2 = k$ admet :
> - deux solutions $\sqrt{k}$ et $-\sqrt{k}$ lorsque $k > 0$;
> - une unique solution égale à 0 lorsque $k = 0$;
> - aucune solution lorsque $k < 0$.

4) a) Représenter graphiquement la fonction racine carrée dans le repère ci-dessous. En utilisant le graphique, résoudre $\sqrt{x} < 2$, puis $\sqrt{x} \geqslant 1$.

> On trace la droite d'équation $y = 2$. Elle coupe la courbe en un point dont l' abscisse est la solution de l'équation $\sqrt{x} = 2$. On repère tous les points de cette courbe dont l'ordonnée est inférieure strictement à 2. Les solutions de l'inéquation sont les abscisses de ces points. Faites attention aux valeurs interdites pour donner les solutions.



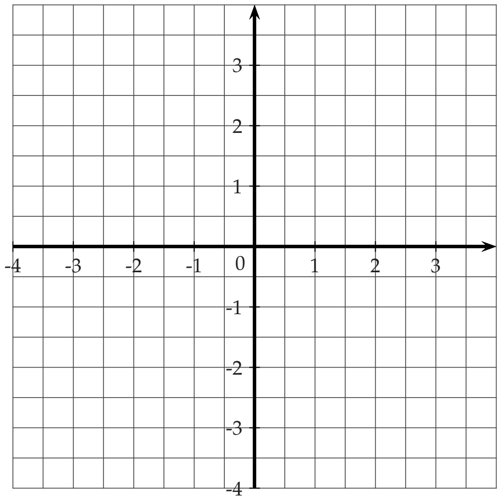
b) Résoudre algébriquement les équations suivantes : $2\sqrt{x} - 8 = 0$, $\dfrac{\sqrt{x}}{5} - 2 = 1$.

> Pour tout réel x positif ou nul, l'équation $\sqrt{x} = k$ admet :
> - une solution k^2 si $k \geqslant 0$;
> - aucune solution si $k < 0$.

....
....
....
....
....

5) a) Représenter graphiquement la fonction inverse dans le repère ci-dessous.

En utilisant le graphique, résoudre $\dfrac{1}{x} < 2$, puis $\dfrac{1}{x} \geqslant 1$.



> On trace la droite d'équation $y = 2$. Elle coupe l'hyperbole en un point dont l' abscisse est la solution de l'équation $\dfrac{1}{x} = 2$. On repère tous les points de l'hyperbole dont l'ordonnée est inférieure strictement à 2. Les solutions de l'inéquation sont les abscisses de ces points. N'oubliez pas d'exclure 0 des solutions puisque c'est une valeur interdite.

....
....
....

b) Résoudre algébriquement les équations suivantes : $\dfrac{1}{x} - 3 = 0$, $\dfrac{1}{x} = \dfrac{8}{5}$ et $\dfrac{1}{x} = -4$.

> Pour tout réel non nul k , l'équation $\dfrac{1}{x} = k$ admet une unique solution $\dfrac{1}{k}$.

....
....
....
....
....
....
....
....

6) a) Le point A de coordonnées $(0,7\ ;\ 0,34)$ est-il sur la courbe représentative de la fonction cube ? ....

b) Encadrer par deux entiers consécutifs la solution de l'équation $x^3 = 100$. ....

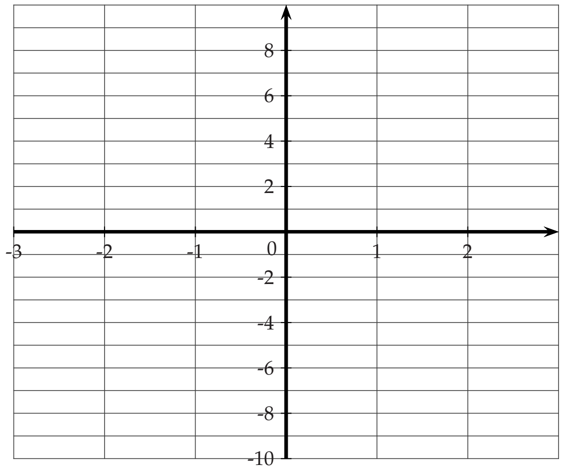
c) Quelle est la valeur exacte de $(\sqrt{7})^3$? ....

d) Quelle est l'image de (-2) par la fonction cube ? ....

e) En utilisant la calculatrice, donner l'antécédent de (-2) par la fonction cube. ....

f) Représenter graphiquement la fonction cube dans le repère ci-dessous.
En utilisant le graphique, résoudre $x^3 < 8$, puis $x^3 \geqslant -1$.

On trace la droite d’équation $y = 8$. Elle coupe l’hyperbole en un point dont l’ abscisse est la solution de l’équation $x^3 = 8$. On repère tous les points de l’hyperbole dont l’ordonnée est inférieure strictement à 8. Les solutions de l’inéquation sont les abscisses de ces points.



. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Définition

1 On considère une fonction d telle que $d(3) = -2$. Traduire cette notation en complétant les phrases ci-dessous :

- ... est l'image de ...
- ... a pour image ...
- ... est un antécédent de ...
- ... a pour antécédent(s) ...

2 Traduire chaque phrase par une égalité :

1) L'image de 2 par la fonction f est -1.
2) 8 a pour image 5 par la fonction f.
3) -2 est l'image de -5 par la fonction f.
4) 7 est un antécédent de 4 par la fonction f.

3 On étudie le processus p qui, à tout entier compris entre 1 et 99, associe son chiffre des dizaines.

1) Donner $p(24)$.
2) Donner le (ou les) antécédent(s) éventuel(s) de 2 par p.
3) Trouver les réels x tels que :
   - $p(x) = 3$
   - $p(3) = x$

4 On définit f et g, deux fonctions :

- f est la fonction qui à un nombre réel x associe le nombre obtenu en procédant de la manière suivante : on ajoute 4 au nombre, on élève le résultat obtenu au carré, on retranche 16.
- De même, on définit la fonction g par le procédé suivant : on retranche 5 au nombre, on prend l'inverse du résultat obtenu, on multiplie par 4.

1) Quelle est l'image de 3 par f ?
2) Donner l'expression correspondant à f. Ecrire le résultat sous forme développée.
3) Quelle est l'image de 0 par g ?
4) Donner l'expression correspondant à g.
5) Quel réel n'a pas d'image par g ?

5 Un club de foot propose des places à 10 € pour les non-abonnés et à 4 € pour les abonnés (achat de la carte d'abonnement en début de saison : 40 €). Exprimer en fonction du nombre de match x le prix total $p_{na}(x)$ payé par un non abonné et le prix total $p_a(x)$ payé par un abonné.

Images et antécédents

6 Calculer $f(2)$ et $f(-1)$ pour la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

7 La fonction m est définie sur $\mathbb{R}$ par $m(x) = 3x - 5$. Quel est l'antécédent de 4 ? Celui de -3 ?

8 On définit deux fonctions k et ℓ, définies sur $\mathbb{R}$, par :

$$k(x) = 2x + 3 \text{ et } \ell(x) = x^2.$$

1) Déterminer le(s) antécédent(s) de 2 par la fonction k.
2) Déterminer le(s) antécédent(s) de 3 par la fonction ℓ.
3) Citer un nombre qui n'a pas d'antécédent par ℓ.

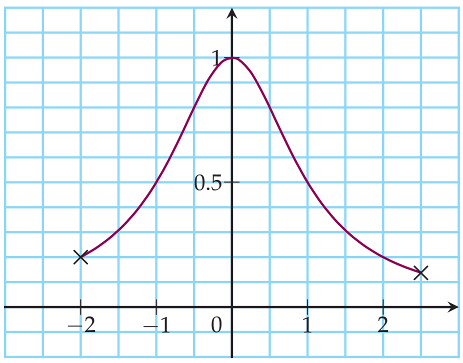
9 Soit une fonction f définie sur $[-2\,;\,2]$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x - 2$$

Avec l'aide de la calculatrice, construire un tableau de valeurs de la fonction f avec un pas de 0,5.

10 Avec l'aide de la calculatrice, dresser un tableau de valeurs de la fonction r définie sur $[-10; 10]$ par $r(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ avec un pas de 1.

11 Voici la courbe représentative d'une fonction f.



Par lecture graphique, déterminer :

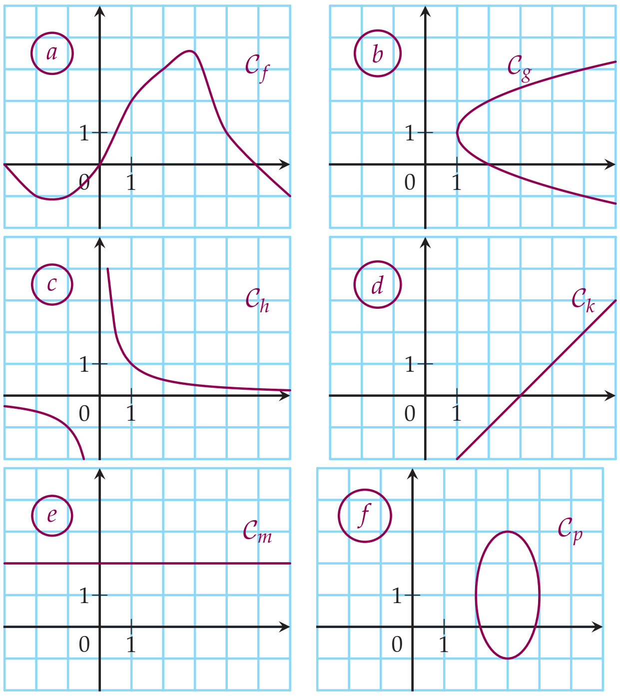
1) l'ensemble de définition de f.
2) l'image de -1 par f ; l'image de 0 par f.
3) $f(0,5)$ et $f(2)$.
4) les antécédents éventuels de 0,5 par f ;
5) les antécédents éventuels de 1 par f.
6) les antécédents éventuels de 0 par f.

S'entraîner

Représentations graphiques

12 Fonctions ?

Parmi les graphiques proposés, lesquels correspondent à la représentation graphique d'une fonction ?



13 Tracer la courbe représentative de f définie par $f(x) = (x+1)^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$ pour x entre -4 et 4.

14 Soit f définie sur $[-4;2]$ qui à x associe $\dfrac{2x+2}{x+5}$.

1) Éditer un tableau de valeurs de f avec la calculatrice.

2) Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f.

3) Vérifier le tracé sur l'écran de la calculatrice.

15 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - 3x$. Les points suivants sont-ils des points de la courbe représentative de f ?

- $A(-1;7)$
- $B(4;16)$
- $C\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{11}{3}\right)$

16 Traduire par des égalités du type $y = f(x)$ chacune des phrases suivantes.

1) $\mathcal{C}$ passe par le point de coordonnées $(-2;5)$.

2) $\mathcal{C}$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée -1.

3) La courbe $\mathcal{C}$ passe par l'origine du repère.

4) $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses aux point d'abscisses -2 et 3.

17 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 9$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1) La courbe $\mathcal{C}$ passe-t-elle par l'origine du repère ? Justifier.

2) B est un point de $\mathcal{C}$ et son abscisse est égale à -4. Quelle est son ordonnée ?

3) Existe-t-il un point de $\mathcal{C}$ d'ordonnée nulle ?

18 f est la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{3}{x} + 1$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?

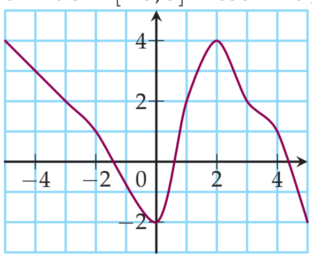
2) Le point $A\left(\dfrac{1}{3};10\right)$ est-il un point de $\mathcal{C}$?

3) Nabolos affirme que le point de coordonnées $(-5;0,4)$ est sur $\mathcal{C}$. A-t-il raison ?

4) En quel(s) point(s), la courbe $\mathcal{C}$ coupe-t-elle l'axe des abscisses ?

Lectures graphiques

19 Voici la courbe représentative d'une fonction g définie sur $[-5;5]$. Résoudre graphiquement :



1) $g(x) = 2$

2) $g(x) = -3$

3) $g(x) = 4$

4) $g(x) = -2$

20 Voici la courbe représentative d'une fonction h définie sur $[-5;5]$. Résoudre graphiquement :

1) $h(x) \geqslant 0$

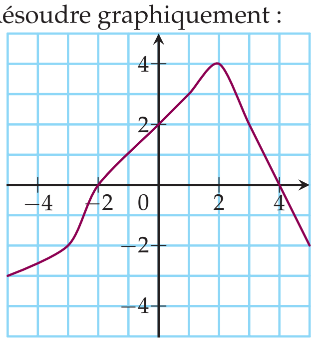
2) $h(x) < -4$

3) $h(x) < -2$

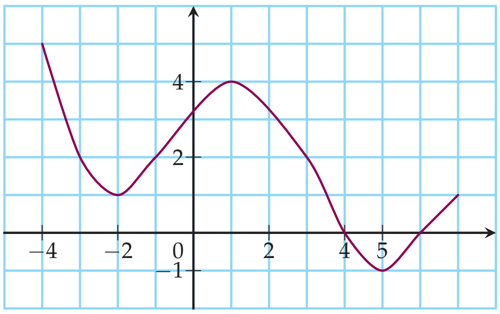
4) $h(x) > 2$

5) $h(x) < 2$

6) $h(x) \leqslant 2$



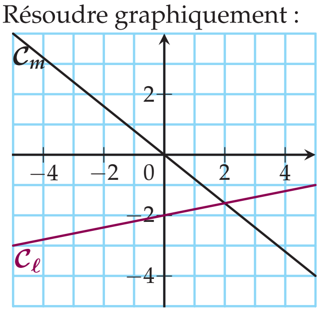
21 On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-4\,;\,7]$.



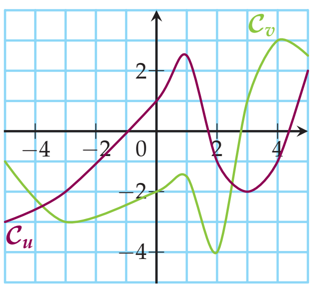
1) Résoudre graphiquement :
   - a) l'équation $f(x) = 2$;
   - b) l'équation $f(x) = -3$;
   - c) l'inéquation $f(x) < 2$;
   - d) l'inéquation $f(x) \leqslant 1$;
   - e) l'inéquation $f(x) < 0$.
   - f) l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.
2) Dresser le tableau de signes de la fonction f sur $[-4\,;\,7]$.

22 Voici les courbes représentatives sur $[-5;5]$ de deux fonctions ℓ et m. Résoudre graphiquement :

1) $m(x) > 0$
2) $\ell(x) = m(x)$
3) $\ell(x) < m(x)$
4) $\ell(x) \geqslant m(x)$



23 Voici les courbes représentatives de deux fonctions u et v définies sur $[-5;5]$. Estimer les solutions des (in)équations ci-dessous.



1) $u(x) = v(x)$
2) $u(x) \geqslant v(x)$
3) $u(x) < v(x)$

Fonctions de référence

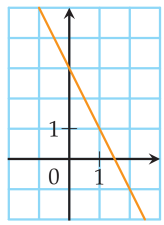
24 Parmi les expressions suivantes, lesquelles définissent une fonction affine ? Justifier.

1) $f(x) = 4 - 2x$
2) $g(x) = \dfrac{5x-7}{4}$
3) $h(x) = (4x-1)^2$
4) $u(x) = x$
5) $v(x) = 5x - (3x+2)$
6) $m(x) = (x+5)^2 - x^2$

25 Dans chaque cas, indiquer si la situation peut être modélisée à l'aide d'une fonction affine.

1) A la longueur x d'un rectangle de largeur 3 cm, on associe son périmètre.
2) Au prix, en euros, d'un article, on associe le prix après une réduction de 15 %.
3) Au côté x, en cm, d'un carré, on associe l'aire du carré en cm^2.

26 On donne le graphique ci-contre.

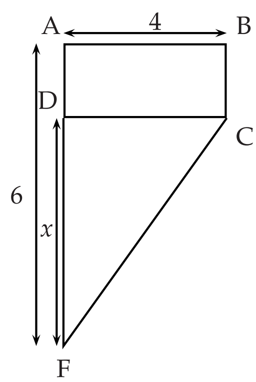


1) Quelle est l'ordonnée à l'origine de cette droite ?
2) Quel est le coefficient directeur de cette droite ?

27 En utilisant un tableau de valeurs, représenter, dans un repère les fonctions affines définies par :

1) $f(x) = 3x - 4$
2) $g(x) = 5 - 2x$
3) $h(x) = 2x$
4) $u(x) = 3$
5) $v(x) = -3x + 1$
6) $t(x) = 4 - 3x$

28 On considère la figure ci-contre où les dimensions sont données en cm et les aires en cm^2.
ABCD est un rectangle.
Le triangle DCF est rectangle en D.
On donne AB = 4 ; AF = 6 ; DF $= x$.



1) Exprimer AD en fonction de x.
2) Montrer que l'aire du rectangle ABCD est de $24 - 4x$.
3) Calculer l'aire du triangle DCF en fonction de x.
4) Pour quelle valeur de x, l'aire du rectangle ABCD est-elle égale à l'aire du triangle DCF ?

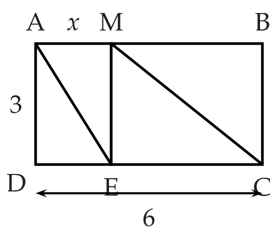
S'entraîner

29 Un ticket de bus coûte 1,20 €.
On peut aussi prendre un abonnement annuel de 30 € ; le trajet coûte alors 1 €.

1) On note x le nombre de trajets en bus effectués dans l'année.
Donner l'expression de la fonction :
 - f qui à x associe le prix total sans abonnement ;
 - g qui à x associe le prix total avec abonnement.
2) Donner l'expression réduite de $h(x) = f(x) - g(x)$. Que représente $h(x)$?
3) Représenter les fonctions f, g et h sur l'écran d'une calculatrice.
4) A partir de combien de trajets effectués dans l'année l'abonnement est-il intéressant ? Justifier par un calcul.

30 Soit $ABCD$ un rectangle et M un point de $[AB]$ tel que $AM = x$.
Le point E est le projeté orthogonal de M sur $[CD]$.
On sait de plus, que $DC = 6$ et $AD = 3$. Montrer que les fonctions suivantes sont affines en les écrivant sous la forme « $ax + b$ » :

- $f : x \longmapsto MB$
- $g : x \longmapsto$ périmètre$(AMED)$
- $h : x \longmapsto$ Aire(AME)
- $u : x \longmapsto$ Aire(BMC)
- $k : x \longmapsto$ Aire$(AMEC)$



31

1) Quels sont les nombres dont le carré est 36 ?
2) Un nombre négatif a pour carré 5. Quel est ce nombre ?
3) Le nombre a vérifie l'égalité $\sqrt{a} = 4$. Quel est ce nombre ?
4) Existe-t-il un nombre négatif dont le carré est 7 ?
5) Existe-t-il un nombre dont le carré est -1 ?

32 A et B sont deux points de la courbe de la fonction carré. Le point A a une abscisse négative et une ordonnée qui vaut 2. Le point B a une abscisse positive et une ordonnée égale à 7.
Déterminer la valeur exacte de l'écart entre l'abscisse de A et l'abscisse de B.

33 On considère la fonction carré.

1) Déterminer un intervalle d'amplitude 10 sur lequel la fonction est croissante.
2) Déterminer un intervalle d'amplitude 6 sur lequel la fonction est décroissante.
3) Déterminer un intervalle d'amplitude 5 sur lequel la fonction n'est ni croissante, ni décroissante.
4) Déterminer un intervalle d'amplitude 7 sur lequel la fonction a pour minimum 0 et pour maximum 16.

34 Soit f la fonction carré.

1) On considère l'intervalle $I = [1;3]$. Donner les extremums de f sur I.
2) Même question pour l'intervalle $J = [-3;-1]$.
3) Même question pour l'intervalle $K = [-3;2]$.

35 En utilisant la représentation graphique de la fonction carré, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

1) $x^2 < 4$. 2) $x^2 \geqslant 9$. 3) $5 < x^2 < 9$.

36 En utilisant la représentation graphique de la fonction carré, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

1) $x^2 \leqslant 6$. 2) $x^2 \geqslant 7$. 3) $3 \leqslant x^2 < 6$.

37 Résoudre algébriquement les équations :

1) $4x^2 - 8 = 0$. 2) $6 - 2x^2 = 0$. 3) $x^2 + 4 = 0$.

38 **Démonstration**

Démontrer que pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$.

39 **Démonstration**

Démontrer que la fonction carré est paire.

40 Dans chaque cas, calculer l'image du nombre proposé par la fonction racine carrée.

1) 49	4) 10^8	7) 0
2) 100	5) 4×10^{-6}	8) $\sqrt{5}$
3) $\dfrac{4}{25}$	6) 3	9) -1

41 Dans chaque cas, déterminer un encadrement de $\sqrt{x}$.

1) $0 < x < 4$
2) $0 \leqslant x \leqslant 0,04$
3) $1 \leqslant x < 9 \times 10^6$

42 Résoudre les équations.

1) $\sqrt{x} = 4$
2) $\sqrt{x} = -3$
3) $\sqrt{x} = 3$
4) $\sqrt{x} - 5 = 0$

43 Résoudre les inéquations.

1) $\sqrt{x} > 3$ **2)** $\sqrt{x} \leqslant 10^2$ **3)** $\sqrt{x} \leqslant -2$.

44 Résoudre les inéquations.

1) $\sqrt{x^2} < 1$ **2)** $\sqrt{x} - 2 \leqslant 0$ **3)** $\sqrt{x} > 10$.

45

1) Quel est l'inverse de 5 ? et celui de -3 ?

2) Quel est le nombre dont l'inverse est 0,5 ?

3) Quel est le nombre dont l'inverse est 4 ?

4) Quel est le nombre dont l'inverse est -5 ?

5) Le nombre a vérifie l'égalité $\dfrac{1}{a} = 2$. Quel est ce nombre ?

6) Quel nombre n'a pas d'inverse ?

46 Résoudre les équations suivantes :

1) $\dfrac{1}{x} = 2$. **3)** $\dfrac{1}{x} = -5$.

2) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{4}{3}$. **4)** $\dfrac{1}{x} - 3 = 0$.

47 **Démonstration**

Démontrer que la fonction inverse est impaire.

48 **Démonstration**

Démontrer que la fonction inverse ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$.

49 Résoudre les équations suivantes :

1) $\dfrac{1}{x} = -8$. **3)** $\dfrac{1}{x} + 9 = 0$.

2) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{4}{9}$. **4)** $\dfrac{1}{x} - 4 = 0$.

50 Résoudre les inéquations suivantes en utilisant la courbe représentative de la fonction inverse :

1) $\dfrac{1}{x} \geqslant 7$. **3)** $\dfrac{1}{x} + 3 \leqslant 0$.

2) $\dfrac{1}{x} > \dfrac{2}{5}$. **4)** $\dfrac{1}{x} \leqslant -4$.

51 Les questions sont indépendantes.

1) Existe-t-il des nombres dont le cube est -27 ? Si oui, les donner.

2) Quelle est la valeur de $(-2)^3$?

3) Donner un encadrement à l'unité du nombre dont le cube est 36. On appellera u ce nombre.

4) Si deux nombres sont rangés dans un certain ordre, alors les cubes de ces nombres sont rangés dans le même ordre. Vrai ou faux ?

Problèmes. Approfondissement

52 Déterminer tous les triangles rectangles dont les longueurs des côtés sont des entiers consécutifs.

53 Un article coûte 120 €.

1) **a)** Son prix augmente de 22 %. Quel est le nouveau prix ?

b) Il subit une nouvelle augmentation de 22 %. Quel est le prix après ces deux augmentations ?

2) Si l'article avait directement augmenté de 44 % quel aurait été son prix après augmentation ?

3) On voudrait répartir cette hausse de 44 % en deux hausses successives de t %. Déterminer t.

54 Il existe différentes unités de mesure de la température : en France on utilise le degré Celsius (°C), aux Etats-Unis on utilise le degré Fahrenheit (° F). Pour passer des degrés Celsius aux degrés Fahrenheit, on multiplie le nombre de départ par $1,8$ et on ajoute 32 au résultat.

1) Qu'indiquerait un thermomètre en degrés Fahrenheit si on le plonge dans une casserole d'eau qui gèle ? On rappelle que l'eau gèle à 0 °C.

2) Qu'indiquerait un thermomètre en degrés Celsius si on le plonge dans une casserole d'eau portée à 212 °F ? Que se passe t-il ?

3) **a)** Si l'on note x la température en degré Celsius et $f(x)$ la température en degré Fahrenheit, exprimer $f(x)$ en fonction de x.

b) Quelle est l'image de 5 par la fonction f ?

c) Quel est l'antécédent de 5 par la fonction f ?

d) Traduire en terme de conversion de température la relation $f(10) = 50$.

S’entraîner

55 On s’intéresse à un carré de côté de longueur x cm.

1) Exprimer son périmètre P en fonction de x.

2) Exprimer son aire A en fonction de x.

3) Exprimer son aire A en fonction de son périmètre P.

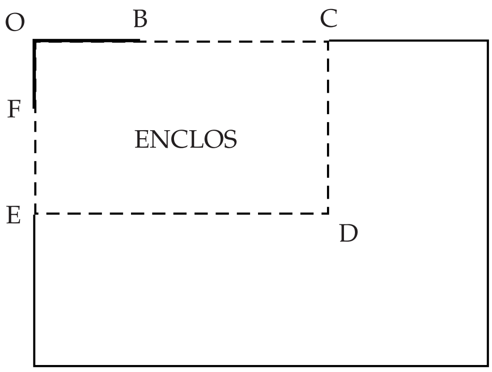
56 Un commercial loue un véhicule pendant une journée. Le prix de la location est constitué d’une partie fixe de 50 € et d’une partie proportionnelle à la distance parcourue au coût de 0,20 € par kilomètre.

1) Donner le prix, en €, de la location $P(x)$ en fonction de la distance x parcourue (en km).

2) Quelle a été la distance parcourue pour le prix de 95€ ?

57

Le schéma ci-contre représente le jardin de Leïla. Il n’est pas à l’échelle.
[OB] et [OF] sont des murs, OB = 6 m et OF = 4m.
La ligne pointillée BCDEF représente le grillage que Leïla veut installer pour délimiter un **enclos rectangulaire OCDE**.
Elle dispose d’un rouleau de 50 m de grillage qu’elle veut utiliser entièrement.



Leïla envisage plusieurs possibilités pour placer le point C.

1) En plaçant C pour que BC $= 5$ m, elle obtient que FE $= 15$ m.

a) Vérifier qu’elle utilise les 50 m de grillage.

b) Justifier que l’aire A de l’enclos OCDE est 209 m^2.

2) Pour avoir une aire maximale, Leïla fait appel à sa voisine professeure de mathématiques qui, un peu pressée, lui écrit sur un bout de papier :

« En notant BC $= x$, on a A$(x) = -x^2 + 18x + 144$ »

Vérifier que la formule de la voisine est bien cohérente avec le résultat de la question 1.

3) *Dans cette partie, les questions* **a.** *et* **b.** *ne nécessitent pas de justification.*

a) Leïla a saisi une formule en B2 puis l’a étirée jusqu’à la cellule I2.

B2			=−B1*B1+18*B1+144							
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x	5	6	7	8	9	10	11	12	
2	$A(x) = -x^2 + 18x + 144$	209	216	221	224	225	224	221	216	
3										

Quelle formule est alors inscrite dans la cellule F2 ?

b) Parmi les valeurs figurant dans le tableau, quelle est celle que Leïla va choisir pour BC afin obtenir un enclos d’aire maximale ?

c) Donner les dimensions de l’enclos ainsi obtenu.

58 On considère les programmes de calculs suivants :

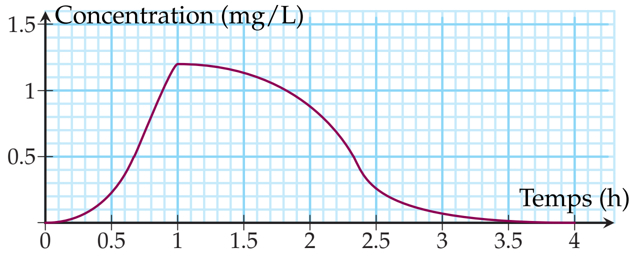
Programme A
- Choisir un nombre ;
- Lui ajouter 1 ;
- Calculer le carré de la somme obtenue ;
- Soustraire au résultat le carré du nombre de départ.

Programme B
- Choisir un nombre ;
- Ajouter 1 au double de ce nombre.

1) On choisit 5 comme nombre de départ. Quel résultat obtient-on avec chacun des deux programmes ?

2) Démontrer que, quel que soit le nombre choisi, les résultats obtenus avec les deux programmes sont toujours égaux.

59 On a mesuré, en continu pendant quatre heures, la concentration $\mathcal{C}$ d'un médicament dans le sang d'un patient. La fonction $\mathcal{C}$ est représentée ci-dessous.



1) Quelle est la concentration du médicament dans le sang au bout de 2 h ?

2) Quelle inéquation a pour solution l'intervalle de temps où la concentration du médicament est au plus égale à 1 ?

3) À quels moments la concentration dans le sang est-elle de 0,5 mg/L ?

4) Ce médicament est jugé efficace quand la concentration dans le sang dépasse 0,8 mg/L.
Quelle est donc sa période d'efficacité ? (On arrondira grossièrement.)

60 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 + 8x + 7$$

1) Calculer $f(-1)$ puis $f\left(\frac{2}{3}\right)$.

2) Rechercher algébriquement les éventuels antécédents de 7 par f.

61 Lors d'une activité sportive, il est recommandé de surveiller son rythme cardiaque.

Les médecins calculaient autrefois, la fréquence cardiaque maximale recommandée f_m exprimée en battements par minute, en soustrayant à 220 l'âge a de la personne exprimé en années.

1) Traduire cette dernière phrase par une relation mathématique.

2) Des recherches récentes ont montré que cette relation devait être légèrement modifiée. La nouvelle relation utilisée par les médecins est :

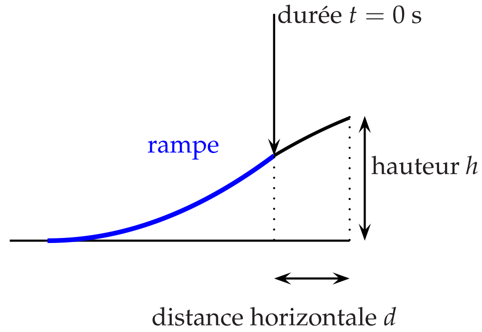
$$f_m(a) = 208 - 0,75a.$$

a) Calculer la fréquence cardiaque maximale à 60 ans recommandée aujourd'hui par les médecins.

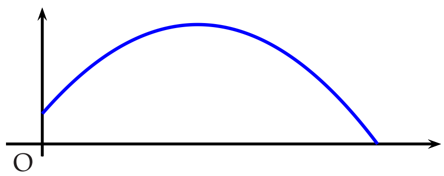
b) Déterminer l'âge pour lequel la fréquence cardiaque maximale recommandée est de 184 battements par minute.

62 Lors d’une course en moto-cross, après avoir franchi une rampe, Nabolos a effectué un saut record en moto. Le saut commence dès que Nabolos quitte la rampe. On note t la durée (en secondes) de ce saut.
La hauteur (en mètres) est déterminée en fonction de la durée t par la fonction h suivante :

$$h\ : t \longmapsto (-5t - 1,35)(t - 3,7)$$



Voici la courbe représentative de cette fonction h.

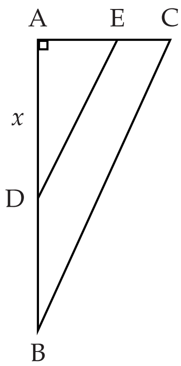


Les réponses seront justifiées à l’aide de calculs.

1) Calculer $h(4)$. Que peut-on en déduire ?
2) Développer et réduire l’expression de h.
3) A quelle hauteur se trouve Nabolos lorsqu’il quitte la rampe ?
4) Combien de temps dure le saut de Nabolos ?
5) Peut-on dire que le nombre 3,5 est un antécédent du nombre 3,77 par la fonction h ?
6) Jérémyos affirme que la hauteur maximale a été obtenue avant 1,8 seconde. A-t-il raison ?

63 L’unité est le centimètre.

ABC est un triangle rectangle en A, tel que AB = 8 et AC = 6.
La parallèle à la droite (BC) passant par un point D du segment [AB], coupe le segment [AC] en E.



On pose AD = x.
Déterminer la position du point D sur le segment [AB] de sorte que le périmètre $f(x)$ du triangle ADE soit égal au périmètre $g(x)$ du trapèze ECBD.

64 Un producteur de pommes de terre peut en récolter à ce jour 1700 kg et les vendre 1,20 € le kg.
S’il attend, sa récolte augmentera de 75 kg par jour, mais le prix baissera de 0,03 € par jour.

1) S’il vend toute sa production aujourd’hui, quel sera son chiffre d’affaires ?
2) On suppose qu’il attend 30 jours pour récolter.
   Calculer la quantité qu’il récoltera, le prix du kg de pommes de terre, et en déduire le chiffre d’affaires.
3) On suppose que le producteur attend n jours pour récolter (n est un nombre entier compris entre 0 et 30).
   a) Exprimer $Q(n)$, la quantité de pommes de terre qu’il pourra récolter le n^e jour, en fonction de n.
   b) Exprimer $P(n)$, le prix du kg de pommes de terre le n^e jour, en fonction de n.
   c) Démontrer que après n jours, le chiffre d’affaire est donné par :
   $$R(n) = -2,25n^2 + 39n + 2040$$
4) Sur la calculatrice, faire afficher une table de valeurs pour $R(n)$ pour n allant de 0 à 30, avec un pas de 1.
5) Utiliser cette table pour déterminer la valeur de n correspondant à un chiffre d’affaire maximal pour ce producteur. Quel sera alors ce chiffre d’affaires ?

65 Pour organiser une sortie scolaire, un professeur demande les tarifs à deux compagnies de bus :
- Compagnie Nabolos : pas de versement à la réservation et 2 euros par kilomètre parcouru.
- Compagnie Nanolos : 128 euros à la réservation et 0,60 euro par kilomètre parcouru.

On désigne par :
- x la distance parcourue en km (entre 0 et 400 km) ;
- $b(x)$ le coût du trajet avec la compagnie Nabolos ;
- $n(x)$ le coût du trajet avec la compagnie Nanolos ;

Les problèmes suivants sont indépendants.

1) **Premier problème :**
   Le professeur a construit son parcours et évalué la distance à parcourir. Il s’aperçoit que le tarif est identique pour les deux compagnies. Quelle est la distance en km que le professeur souhaite parcourir ?

2) **Deuxième problème :**
   Le professeur dispose d’un budget de 228 euros pour le bus. Quelle est la distance maximale que l’on peut parcourir ? Avec quelle compagnie ?

3) **Troisième problème :**
   Une troisième compagnie, la compagnie Merguès a mis en place une campagne de publicité (il me semble que cette compagnie aime bien les mathématiques).

   `Un voyage de 200 kms vous coûtera 210 euros.`

   `Un voyage de 300 kms vous coûtera 290 euros.`

   `Le coût du voyage est une fonction affine du nombre de km parcourus.`

   Quel est le prix demandé par cette compagnie si le nombre de km pour la sortie scolaire est de 280 km ?

   `Indication` : on pourra poser x le nombre de km parcourus et $m(x)$ le prix du trajet correspondant pour exprimer $m(x)$ en fonction de x.

66 Pour la location d'un véhicule, une entreprise de location propose l'option suivante :
150 € pour la première semaine et 25 € par jour supplémentaire.

1) Nabolos loue un véhicule de cette entreprise pendant 9 jours. Combien va-t-il payer ?

2) Si x désigne le nombre de jours de locations et $f(x)$ le coût correspondant, compléter les pointillés suivants :
- Si $0 \leqslant x \leqslant 7$: $f(x) =$ ....
- Si $x > 7$: $f(x) =$ ....

67 On considère le programme de calcul suivant :

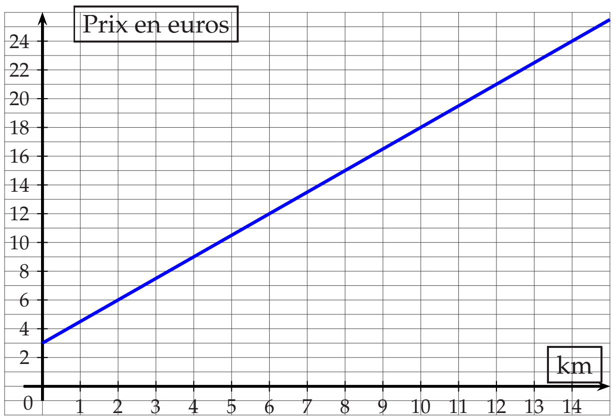
- Choisir un nombre ;
- Prendre le carré de ce nombre ;
- Ajouter 6 fois le nombre de départ au résultat précédent ;
- Afficher le résultat final.

On note x le nombre choisi au départ.

1) Exprimer en fonction de x le résultat final obtenu.

2) Déterminer tous les nombres que l'on peut choisir pour que le résultat final soit 0.

68 La droite ci-dessous représente la fonction p qui donne le prix $p(x)$ d'une course de taxi en fonction du nombre x de kilomètres parcourus.



1) Exprimer le prix $p(x)$ en fonction de x.

2) Pour un autre taxi, le prix $t(x)$ d'une course en fonction du nombre x de kilomètres admet pour expression $t(x) = x + 8$.

a) Représenter, sur le graphique, la fonction t.

b) Déterminer graphiquement, à partir de quelle distance, le tarif $t(x)$ est plus avantageux.

Algorithmes

69 ALGO

On considère l'algorithme ci-dessous :

$$\begin{array}{l} a \longleftarrow a+1 \\ a \longleftarrow 2a \end{array}$$

Si la variable a contient la valeur 2 avant l'exécution de cet algorithme, quelle est sa nouvelle valeur après l'exécution de cet algorithme ?

Pour un nombre a quelconque, quel est le résultat obtenu à la fin de l'algorithme ?
On veut que a contienne la valeur 5 à la fin de l'exécution de l'algorithme. Quel nombre doit contenir a en début d'algorithme ?

70 ALGO

On considère l'algorithme ci-dessous :

$a \longleftarrow x+2$
$b \longleftarrow a^2+1$
$y \longleftarrow a+b$

Compléter le tableau suivant :

x	0	1	-2	$\frac{1}{3}$
a				
b				
$a+b$				
y				

Soit f la fonction qui à x associe le réel y. Donner l'expression algébrique de la fonction f sous forme développée.

71 ALGO

Voici un algorithme :

$x \longleftarrow a$
Tant que $x \leqslant b$
    $y \longleftarrow 3x^2-6x+5$
    Afficher y
    $x \longleftarrow x+p$
Fin Tant que

1) On choisit d'exécuter cet algorithme avec $a=-1$, $b=3$ et $p=1$.
   Compléter le tableau ci-dessous.
2) Quel est l'objectif de cet algorithme ?

	Etape 0	Etape 1	Etape 2
Condition $x \leqslant b$			
y			
x			

	Etape 3	Etape 4	Etape 5
Condition $x \leqslant b$			
y			
x			