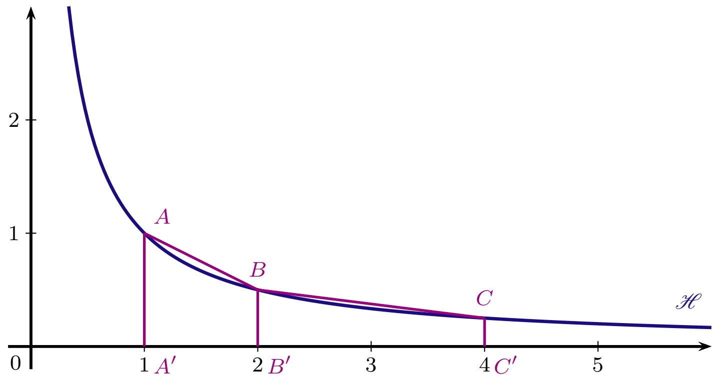
Lycée Louise Michel
Seconde

MATHEMATIQUES
Calculs algébriques - Equations : entraînement 2 (corrigé)

Exercice 1

1. a. Construction des deux trapèzes :



b. Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives : $(1\ ;\ 1)$, $(2\ ;\ 0,5)$ et $(4\ ;\ 0,25)$.
L'aire du trapèze $A'B'BA$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\frac{(BB'+AA')\times A'B'}{2} &= \frac{(0,5+1)\times 1}{2}\\ &= 0,75\end{aligned}$$

> **Appliquer la formule**
> Dans le trapèze $A'B'BA$, la petite base est $[BB']$, la grande base $[AA']$ et la hauteur $[A'B']$.
> N'oubliez pas que les bases sont les côtés parallèles !

L'aire du trapèze $B'C'CB$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\frac{(BB'+CC')\times B'C'}{2} &= \frac{(0,5+0,25)\times 2}{2}\\ &= 0,75\end{aligned}$$

Les deux aires sont effectivement égales.

2. a. Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives : $(1\ ;\ 1)$, $\left(a\ ;\ \dfrac{1}{a}\right)$ et $\left(a^2\ ;\ \dfrac{1}{a^2}\right)$).

On a donc : $A'B' = a-1$, $\quad BB' = \dfrac{1}{a}$, $\qquad CC' = \dfrac{1}{a^2}$ et $B'C' = a^2 - a$.

b. L'aire du trapèze $A'B'BA$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\frac{(BB'+AA')\times A'B'}{2} &= \frac{\left(\dfrac{1}{a}+1\right)\times(a-1)}{2}\\ &= \frac{\dfrac{a}{a}+a-\dfrac{1}{a}-1}{2}\\ &= \frac{\cancel{1}+a-\dfrac{1}{a}-\cancel{1}}{2}\\ &= \frac{\dfrac{a^2}{a}-\dfrac{1}{a}}{2}\\ &= \frac{\dfrac{a^2-1}{a}}{2}\\ &= \frac{a^2-1}{2a}\end{aligned}$$

> **Technique de calculs**
> Les règles utilisées ici :
> - $\dfrac{1}{a}\times a = \dfrac{a}{a} = 1$.
> - $a = \dfrac{a}{1} = \dfrac{a^2}{a}$.
> - Diviser par 2, revient à multiplier par $\dfrac{1}{2}$:
>
> $\dfrac{\dfrac{a^2-1}{a}}{2} = \dfrac{a^2-1}{a}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{a^2-1}{2a}$.

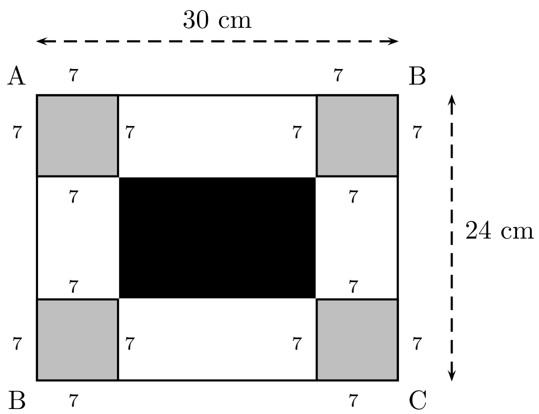
c. L'aire du trapèze $B'C'CB$ est donnée par :

$$
\begin{aligned}
\frac{(BB'+CC')\times B'C'}{2} &= \frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}\right)\times(a^2-a)}{2}\\
&= \frac{\frac{a^2}{a}+\frac{a^2}{a^2}-\frac{a}{a}-\frac{a}{a^2}}{2}\\
&= \frac{a+\cancel{1}-\cancel{1}-\frac{1}{a}}{2}\\
&= \frac{a-\frac{1}{a}}{2}\\
&= \frac{\frac{a^2-1}{a}}{2}\\
&= \frac{a^2-1}{2a}
\end{aligned}
$$

On retrouve le même résultat. On en déduit que quelque soit le réel $a > 1$, les aires des deux trapèzes sont égales.

Exercice 2

1. Schéma avec les longueurs :



a. Périmètre d'un carré gris : $4 \times 7 = 28$ cm.

b. Longueur du rectangle noir : $30 - 2\times 7 = 30 - 14 = 16$;

Largeur du rectangle noir : $24 - 2\times 7 = 24 - 14 = 10$.

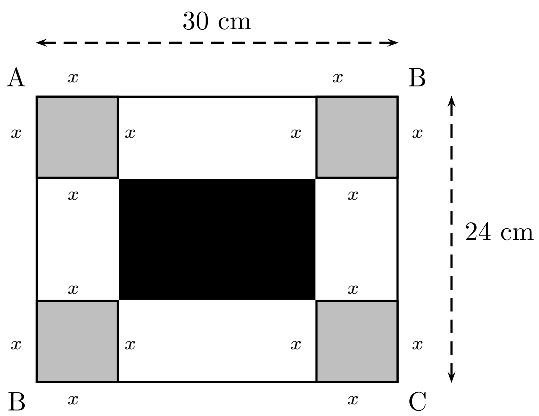
Le périmètre du rectangle noir est donc :

$2\times(16+10) = 2\times 26 = 52$ cm.

Périmètre

Le périmètre d'un rectangle de longueur L et de largeur ℓ est donnée par : $2(L+\ell)$.

2. Le petit schéma pour comprendre :



Si x est la longueur des côtés du carré gris, le périmètre des quatre carrés gris est égal à $4\times 4\times x = 16x$.

Le rectangle noir a pour longueur $30-2x$ et pour largeur $24-2x$. Le périmètre du rectangle noir est donc égal à

$$2[(30-2x)+(24-2x)] = 108-8x$$

Il y a égalité de ces deux périmètres si : $16x = 108-8x$.

$$\begin{aligned} 16x &= 108-8x \\ 16x+8x &= 108 \\ 24x &= 108 \\ x &= \frac{108}{24} \\ x &= 4,5 \end{aligned}$$

C'est quand $x = 4,5$ cm que le périmètre du rectangle noir est égal à la somme des périmètres des quatre carrés gris.
Les périmètres valent alors 72 cm.

Exercice 3

1. Les droites (DE) et (AC) sont parallèles, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{DE}{AC} = \frac{BA}{BD}$$

soit :

$$\frac{1}{y} = \frac{x-2}{x}$$

Thalès : souvenir
Les triangles ABC et BDE sont en configuration de Thalès. Le triangle ABC est un agrandissement du triangle BDE.

Par produit en croix, on obtient $y \times (x-2) = x \times 1$.

D'où (en divisant les eux membres par $(x-2) \neq 0$) :

$$y = \frac{x}{x-2}$$

Aïe !
On ne trouve pas le résultat attendu.... mais vous devez remarquer que la forme est différente et donc avoir l'idée de transformer l'écriture donnée pour l'écrire sous la forme d'un seul quotient.

Pour $x > 2$:

$$\begin{aligned} 1+\frac{2}{x-2} &= \frac{x-2}{x-2}+\frac{2}{x-2} \\ &= \frac{x-2+2}{x-2} \\ &= \frac{x}{x-2} \end{aligned}$$

Donc, on a bien $y = 1+\dfrac{2}{x-2}$.

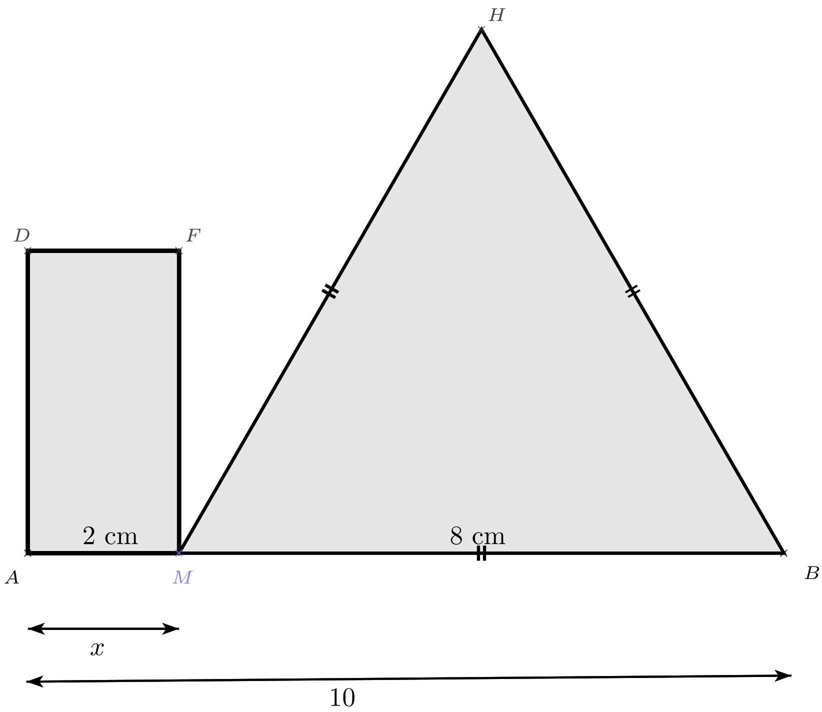
2. Déterminer la position du point B sur (AD) de façon que $AC = 4$ revient à résoudre l'équation $y = 4$ soit $1+\dfrac{2}{x-2} = 3$.
Pour $x > 2$:

$$\begin{aligned} 1+\frac{2}{x-2} &= 4 \\ \frac{2}{x-2} &= 3 \\ 2 &= 3(x-2) \quad \text{Produit en croix} \\ 2 &= 3x-6 \\ 8 &= 3x \\ x &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Pour que $AC = 3$, il faut que le point B soit sur la demi-droite $[AD)$ tel que $AB = \dfrac{8}{3}$.

Exercice 4

1. a.



Attention

N'oubliez pas que le rectangle et le triangle doivent se situer du même côté du segment $[AB]$.

b. Lorsque $x = 2$, le périmètre du rectangle $AMFD$ est $2 \times AM + 2 \times AD = 2 \times 2 + 2 \times 4 = 12$ cm.
Celui du triangle MBH est : $3 \times MB = 3 \times (10 - 2) = 3 \times 8 = 24$ cm.

2. On cherche x de façon que le rectangle et le triangle ait le même périmètre.

• Le périmètre du rectangle $AMFD$ est :

$$2 \times AM + 2 \times AD = 2 \times x + 2 \times 2x = 6x$$

Remarque

$AB = 10$, donc $MB = 10 - x$.

• Le périmètre du triangle MBH est :

$$3 \times MB = 3 \times (10 - x)$$

Le nombre x cherché est donc solution de l'équation :

$$6x = 3 \times (10 - x)$$

$$\begin{aligned} 6x &= 3(10 - x) \\ 6x &= 30 - 3x \\ 6x + 3x &= 30 \\ 9x &= 30 \\ x &= \frac{30}{9} \end{aligned}$$

La valeur exacte de x pour que le rectangle et le triangle aient le même périmètre est $\dfrac{30}{9}$.

Exercice 5

1. La largeur du rectangle est 10 cm et sa longueur est $10+6=16$ cm.
Son aire est donc : $16\times 10=160$ cm^2.

2. L'aire d'un rectangle est donnée par le produit de sa longueur par sa largeur.
Sa largeur est x et sa longueur $x+6$.

Ainsi, $A(x)=x\times(x+6)=x^2+6x$.

3. Pour montrer cette égalité, on part de $(x+3)^2-9$ pour "arriver" à $A(x)$ (c'est-à-dire x^2+6x).

$$\begin{aligned}\underbrace{(x+3)^2}_{(a+b)^2}-9 &= \underbrace{x^2}_{a^2}+\underbrace{6x}_{2ab}+\underbrace{9}_{b^2}-9\\ &= x^2+6x\\ &= A(x)\end{aligned}$$

Autre méthode

En factorisant, on obtient le même résultat :
$\underbrace{(x+3)^2-9}_{a^2-b^2}=\underbrace{(x+3+3)}_{(a+b)}\underbrace{(x+3-3)}_{(a-b)}=x(x+6)=A(x)$.

Ainsi, $A(x)=(x+3)^2-9$.

4. En utilisant l'égalité précédente,

$$\begin{aligned}A(x) &= 27\\ (x+3)^2-9 &= 27\\ (x+3)^2-9-27 &= 0\\ \underbrace{(x+3)^2-36}_{a^2-b^2} &= 0\\ \underbrace{(x+3-6)}_{(a-b)}\underbrace{(x+3+6)}_{(a+b)} &= 0\\ (x-3)(x+9) &= 0\end{aligned}$$

Autre méthode

L'équation $(x-3)(x+9)=0$ peut s'écrire en développant :
$x^2+9x-3x-27=0$ soit $x^2+6x=27$ soit $A(x)=27$.

5. L'aire du rectangle est 27 cm^2 lorsque $A(x)=27$.
D'après la question précédente, cette équation s'écrit $(x-3)(x+9)=0$.
On reconnaît une équation produit nul.
$x-3=0$ a pour solution $x=3$ et $x+9=0$ a pour solution $x=-9$.
Seule 3 est une solution du problème, puisque $x\geqslant 0$.

Il existe donc une unique valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle est 27, c'est $x=3$.