MATHEMATIQUES

Calculs algébriques - Equations : entraînement 3 (corrigé)

Exercice 1

1. On procède par étape :

- Le véhicule consomme 8 litres pour 100 km, soit 0,08 litres pour 1 km.

- $0,08 \times 120 = 9,6$.

Pour 120 km, le véhicule aura consommé 9,6 litres d'essence.

- $9,6 \times 1,5 = 14,4$.

Le coût pour le carburant est de 14,40 €.

- $14,4 + 90 = 104,4$.

Au total, Nabolos aura déboursé 104,4 € pour sa location du week-end.

- $\dfrac{104,4}{120} = 0,87$.

Le prix de revient pour un km est 0,87 €.

2. a. En raisonnant comme dans la question précédente mais avec x km parcourus pendant le week-end, on obtient :

- $0,08x$.

La quantité d'essence consommée pour x est $0,08x$ litres.

- $1,5 \times 0,08x = 0,12x$.

Le coût pour le carburant est de $0,12x$ €.

- $0,12x + 90$.

Au total, Nabolos débourse $0,12x + 90$ € pour sa location du week-end s'il parcourt x km.

- $\dfrac{0,12x + 90}{x}$.

En moyenne, le coût par km est $f(x) = \dfrac{0,12x + 90}{x}$.

b. $f(x) = \dfrac{0,12x + 90}{x} = \dfrac{0,12x}{x} + \dfrac{90}{x} = 0,12 + \dfrac{90}{x}$.

Plus x augmente, plus $\dfrac{90}{x}$ diminue et donc plus le coût au km diminue.

Ainsi, on peut dire que la fonction f est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

3. a. On cherche x de façon que $f(x) = 0,52$.

On est donc amené à résoudre l'équation suivante dans $]0\ ;\ +\infty[$:

$$\begin{aligned}
\frac{0,12x + 90}{x} &= 0,52 \quad \text{On fait un produit en croix.}\\
0,52x &= 0,12x + 90\\
0,52x - 0,12x &= 90\\
0,4x &= 90\\
x &= \frac{90}{0,4}\\
x &= 225
\end{aligned}$$

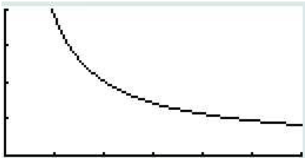
Pensez-y !

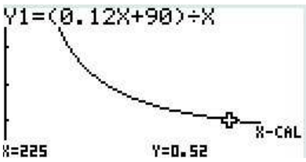
On sait déjà que ce nombre de km est plus grand que 120 car pour 120 km, le prix de revient au km est 0,87 et comme la fonction f est décroissante alors $x > 120$.

Le client a parcouru 225 km durant le week-end.

b. $225 \times 0,52 = 117$.

Le coût total est de 117 € pour cette location.





Calculatrice

On obtient cette représentation avec $X_{Min} = 0$, $X_{Max} = 300$, $X_{Scale} = 50$, $Y_{Min} = 0$, $Y_{Max} = 2$ et $Y_{Scale} = 0,5$.
Avec le solveur graphique Gsolv et la fonction X-CAL, on obtient l'antécédent de 0,52 qui est 225 comme nous l'avons trouvé par le calcul. On remarque également que la fonction f est bien décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 2

1. • Avec $a = 2$ et $b = 4$, on obtient :
$(a+b)^2 = (2+4)^2 = 6^2 = 36$, donc $A = 36$.
$(a-b)^2 = (2-4)^2 = (-2)^2 = 4$, donc $B = 4$.
$A - B = 36 - 4 = 32$.
$\frac{1}{4} \times 32 = 8$.

• Avec $a = -5$ et $b = 3$, on obtient :
$(a+b)^2 = (-5+3)^2 = (-2)^2 = 4$, donc $A = 4$.
$(a-b)^2 = (-5-3)^2 = (-8)^2 = 64$, donc $B = 64$.
$A - B = 4 - 64 = -60$.
$\frac{1}{4} \times (-60) = -15$.

2. Pour démontrer cette conjecture,on utilise un calcul littéral.
On note les deux nombres choisis a et b. On obtient :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, donc $A = a^2 + 2ab + b^2$.

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, donc $B = a^2 - 2ab + b^2$.

Pensez-y !

Vérifiez les résultats obtenus dans la première question.
Le produit de a par b dans le premier exemple donne bien 8 et dans le deuxième , -15.

$$\begin{aligned} A - B &= (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2) \\ &= \cancel{a^2} + 2ab + \cancel{b^2} - \cancel{a^2} + 2ab - \cancel{b^2} \\ &= 4ab \end{aligned}$$

$\frac{1}{4} \times 4ab = ab$.
On vient de prouver que le résultat final est bien le produit des deux nombres de départ.

Exercice 3

On calcule le carré de p :

$$\begin{aligned} p^2 &= (2n+1)^2 \\ &= (2n)^2 + 2 \times 2n \times 1 + 1^2 \\ &= 4n^2 + 4n + 1 \\ &= 2(2n+2) + 1 \end{aligned}$$

Impair

Pour montrer qu'un entier est impair, on montre qu'il s'écrit $2 \times N + 1$ avec N entier.

Par conséquent, p^2 s'écrit $2 \times N + 1$ avec $N = 2n + 2$. Le carré d'un nombre entier positif impair est bien impair.

Exercice 4

1. $AB = 4 + 8 = 12$ et $AC = 4 + 7 = 11$.
Le plus grand côté de ce triangle est AB. Donc si ce triangle est rectangle, il ne peut l'être qu'en C.

$AB^2 = 12^2 = 144$.
$AC^2 + BC^2 = 11^2 + 5^2 = 121 + 25 = 136$.
On a donc $AB^2 \neq AC^2 + BC^2$.
On en déduit que le triangle ABC n'est pas rectangle.

Contraposée

C'est la contraposée du théorème de Pythagore qui permet d'affirmer que le triangle n'est pas rectangle.

2.a. • $(x + 7)^2 = x^2 + 14x + 49$
• $(x + 8)^2 = x^2 + 16x + 64$

Si vous êtes fort

Avec un peu d'entraînement, vous pouvez développer directement sans écrire les calculs intermédiaires.

b. Le plus grand côté du triangle ABC est $[AB]$. Donc si le triangle ABC est rectangle il ne peut l'être qu'en C.

$AB^2 = (x + 8)^2 = x^2 + 16x + 64$.
$AC^2 + BC^2 = (x^2 + 14x + 49) + 5^2 = x^2 + 14x + 74$.
Le triangle ABC est rectangle lorsque $AB^2 = AC^2 + BC^2$ soit $x^2 + 16x + 64 = x^2 + 14x + 74$.

$$\begin{aligned} \cancel{x^2} + 16x + 64 &= \cancel{x^2} + 14x + 74 \\ 16x + 64 &= 14x + 74 \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} 16x - 14x &= 74 - 64 \\ 2x &= 10 \\ x &= \frac{10}{2} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Lorsque $x = 5$, le triangle ABC est rectangle en C. Les longueur des côtes sont alors :
$AB = 13$, $AC = 12$ et $BC = 5$.